Математический анализ
Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: ***Экстремум ФНП***.
Скалярное поле и его характеристики

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

§17. Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$, $M_0(x_0,y_0) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0)\ .$$

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\ .$$

Точки максимума и минимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно ***максимумами*** и ***минимумами*** (***экстремумами***) этой функции.

***Замечания*.**

1) По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D.

2) Если $\forall M(x,y) \in U^*(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad [\ f(x,y) > f(x_0,y_0)\ ],$$

то точку M_0 называют ***точкой строгого максимума*** (соответственно ***точкой строгого минимума***) функции $f(x,y)$.

Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками ***нестрогого максимума*** и ***минимума***.

3) Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

ТЕОРЕМА 2 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 2.

Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x,y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ либо параллельна плоскости xOy, либо вообще не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 2, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x,y)$.

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума функции ДВУХ переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – *критическая точка функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.*

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

1) *если* $A \cdot C - B^2 < 0$, *то точка* $M_0(x_0,y_0)$ *не является точкой экстремума;*
2) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет минимум;*
3) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A < 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет максимум;*
4) *если* $A \cdot C - B^2 = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Замечание.

1) Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0,y_0)$ не удалось, то ответ на вопрос о наличии в M_0 экстремума даст знак $\Delta f(x_0,y_0)$:

   а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) < 0,$$
   то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого максимума;

   б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) > 0,$$
   то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого минимума.

   В случае нестрогих экстремумов при некоторых значениях Δx и Δy приращение функции будет нулевым

2) Определения максимума и минимума и необходимые условия экстремума легко переносятся на функции трех и более числа переменных.
   Достаточные условия экстремума для функции n ($n > 2$) переменных ввиду их сложности в данном курсе не рассматриваются. Определять характер критических точек для них мы будем по знаку приращения функции.

§19. Скалярное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* G *– некоторая область в пространстве* $Oxyz$ [*на плоскости* xOy]. *Говорят, что на* G *задано* ***скалярное поле****, если в каждой точке* $M \in G$ *определена функция* 3-*х переменных* $u = f(M)$ [*функция* 2-*х переменных* $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

1) производная по направлению;

2) градиент.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x,y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,
$M_0(x_0,y_0) \in D$,
$\bar{\mathbf{s}}$ – некоторый вектор.

Пусть $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, такая, что $\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{M}} \upuparrows \bar{\mathbf{s}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если существует и конечен*

$$\lim_{|M_0M| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{|M_0M| \to 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{|M_0M|}$$

то его называют ***производной функции*** $z = f(x,y)$ ***в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ ***по направлению вектора*** $\bar{\mathbf{s}}$ **.**

Обозначают:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

$\dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x,y)$ на отрезке M_0M.

$\Rightarrow \lim\limits_{|M_0M|\to 0} \dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

1) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} > 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ возрастает;

2) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ убывает;

3) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора $\bar{\mathbf{s}}$ – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0

(вектор $\bar{\mathbf{s}}$ является касательным к линии уровня в точке M_0).

***Замечание*.**

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно:

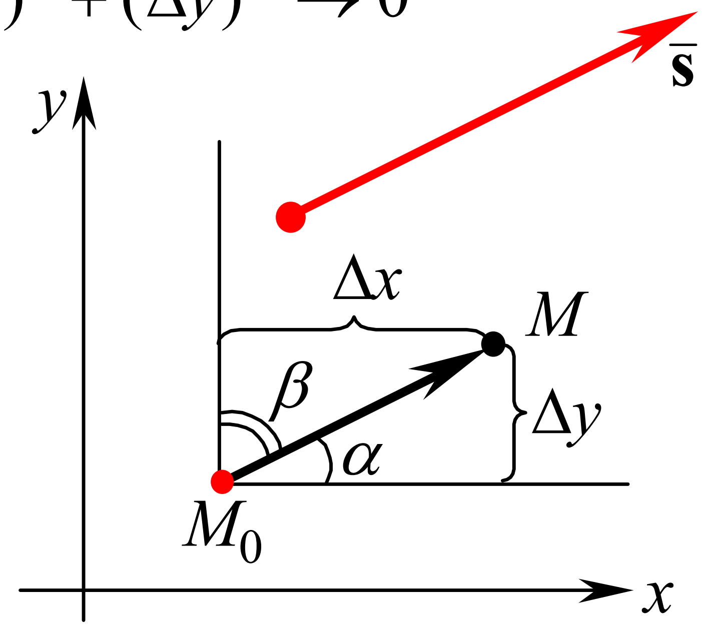
1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{i}$ (направлению оси Ox);

2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{j}$ (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$



Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \rho \cdot \cos\beta$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где cosα, cosβ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\rho\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\rho\cos\beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\lim_{|M_0M| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \to 0}\left(f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta + \mu\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x,y,z)$. Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

2. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$*** *называется вектор с координатами*

$$f'_x(x_0,y_0), \quad f'_y(x_0,y_0).$$

Обозначают: $\mathbf{grad}\, z(M_0)$.

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

1) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью.

   При этом $|\,\mathbf{grad}\, z(M_0)\,|$ равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

2) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x,y)$, проходящей через точку M_0.

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.