

Математический анализ
Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: *Частные производные высших
порядков.
Дифференцируемость ФНП*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

§13. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ имеет $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, определенные на $D \subseteq xOy$.

Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называют также **частными производными первого порядка функции $f(x, y)$** (или **первыми частными производными функции $f(x, y)$**).

$f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в общем случае функции переменных x и y .

Частные производные по x и по y от $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, если они существуют, называются **частными производными второго порядка** (или **вторыми частными производными**) **функции $f(x, y)$** .

Обозначения.

- 1) $\frac{\partial}{\partial x}(f'_x(x, y)):$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad z''_{xx}, \quad f''_{xx}(x, y);$
- 2) $\frac{\partial}{\partial y}(f'_x(x, y)):$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad z''_{xy}, \quad f''_{xy}(x, y);$
- 3) $\frac{\partial}{\partial x}(f'_y(x, y)):$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad z''_{yx}, \quad f''_{yx}(x, y);$
- 4) $\frac{\partial}{\partial y}(f'_y(x, y)):$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \quad z''_{yy}, \quad f''_{yy}(x, y).$

Частные производные второго порядка в общем случае являются функциями двух переменных.

Их частные производные (если они существуют) называют **частными производными третьего порядка** (или **третьими частными производными**) функции $z = f(x, y)$.

Продолжая этот процесс, назовем **частными производными порядка n функции $z = f(x, y)$** частные производные от ее частных производных $(n - 1)$ -го порядка.

Обозначения аналогичны обозначениям для частных производных 2-го порядка. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Частные производные порядка $n > 1$ называют **частными производными высших порядков**.

Частные производные высших порядков, взятые по разным аргументам, называются **смешанными**.

Частные производные высших порядков, взятые по одному аргументу, называют иногда **несмешанными**.

ПРИМЕР. Найти частные производные 2-го порядка от функции
$$z = x^4 + 3x^2y^5 .$$

ТЕОРЕМА 1 (условие независимости смешанной производной от последовательности дифференцирований).

Пусть $z = f(x,y)$ в некоторой области $D \subseteq xOy$ имеет все частные производные до n -го порядка включительно и эти производные непрерывны.

Тогда смешанные производные порядка m ($m \leq n$), отличающиеся лишь последовательностью дифференцирований, совпадают между собой.

§14. Дифференцируемость функций нескольких переменных

1. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – область (т.е. открытое связное множество).

Пусть $\forall M_0(x_0, y_0) \in D$.

Придадим x_0 и y_0 приращение Δx и Δy соответственно (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$).

При этом $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta z(M_0)$ называется **полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$** , соответствующим Δx и Δy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$** если ее полное приращение в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y, \quad (1)$$

где A, B – некоторые числа,

α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$

(или, что то же, при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$).

Замечание. Функции α_1 и α_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

Равенство (1) можно записать и в более сжатой форме:

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho, \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$\alpha = \frac{\alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y}{\rho}$ – бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$.

Функция $z = f(x, y)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D , называется **дифференцируемой в D** .

Напомним: для дифференцируемой функции $y = f(x)$ справедливы утверждения:

1) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$;

2) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Rightarrow y = f(x)$ непрерывна в x_0 .

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по обоим независимым переменным. Причем

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

1) С учетом теоремы 1 равенства (1) и (2) можно записать соответственно в виде:

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \quad (3)$$

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho \quad (4)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

α – бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$.

2) Утверждение обратное теореме 1 неверно. Из непрерывности функции двух переменных в точке и существования в этой точке ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

ПРИМЕР. Функция $z = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке $(0;0)$ и имеет в этой точке частные производные, но не является в этой точке дифференцируемой.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия дифференцируемости ФНП)
Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, причем в самой точке M_0 эти производные непрерывны. Тогда функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

2. Дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения в этой точке, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

называется **полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$** и обозначается $dz(M_0)$ или $df(x_0, y_0)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ полного дифференциала функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

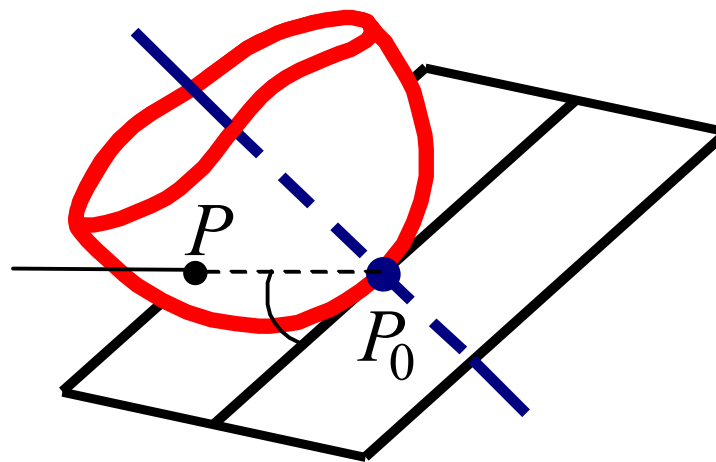
Пусть S – поверхность,

P_0 – фиксированная точка на поверхности S ,

P – текущая точка на поверхности S .

Проведем секущую прямую PP_0 .

Плоскость, проходящая через точку P_0 , называется **касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0** , если угол между секущей PP_0 и этой плоскостью стремится к нулю когда точка P стремится к P_0 , двигаясь по поверхности S произвольным образом.



Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке, называется **нормалью к поверхности в точке P_0** .

ДОКАЗАНО, что

1) если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то поверхность $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательную плоскость.

Ее уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

\Rightarrow уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2) если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$,
 $F(x,y,z)$ – дифференцируема в $P_0(x_0,y_0,z_0)$, причем хотя бы одна из ее частных производных не обращается в P_0 в ноль,
то касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ существует и ее уравнение

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

\Rightarrow уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}$$

Замечание.

Точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$, в которой все частные производные функции $F(x,y,z)$ обращаются в ноль, называется ***особой точкой поверхности.***

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

\Rightarrow поверхность $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательную плоскость. Ее уравнение:

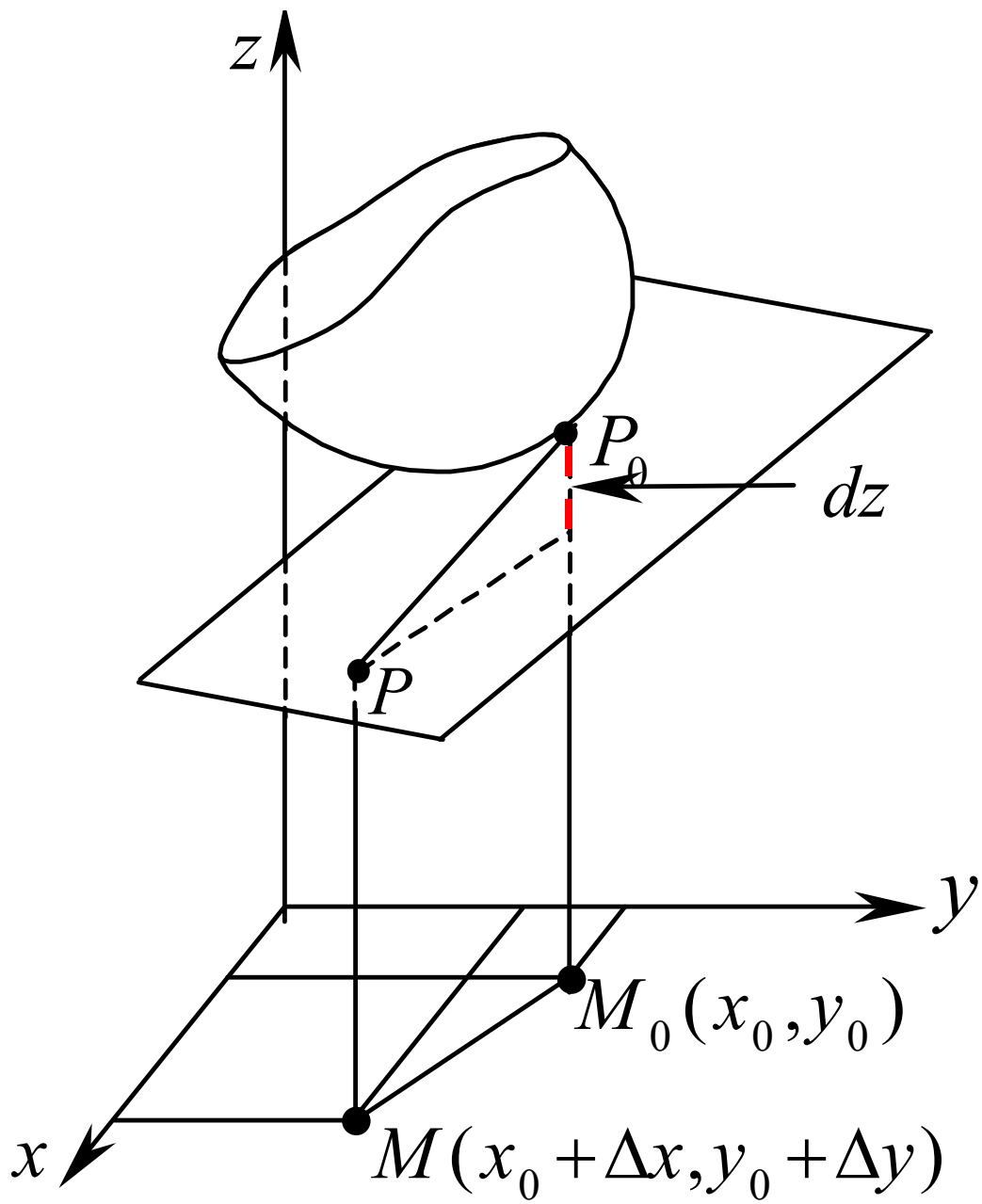
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен приращению, которое получает аппликата точки $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$, когда ее координаты x_0 и y_0 получают приращения Δx и Δy соответственно.



Очевидно, что соответствие $(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \rightarrow df(x_0, y_0)$ является функцией (четырёх переменных).

Ее называют **полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$** и обозначают dz или $df(x, y)$.

Легко доказать, что полный дифференциал функции n переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

В частности, для $df(x, y)$ существует вторая, **инвариантная форма записи**:

$$dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy. \quad (5)$$