

Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: *Несобственные интегралы*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

§5. Несобственные интегралы

Для существования $\int_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$.

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a; b]$, где $b \geq a$.

\Rightarrow существует $\int_a^b f(x) dx$.

Имеем: $\int_a^b f(x) dx = I(b)$, $D(I) = [a; +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$ называется предел функции $I(b)$ при $b \rightarrow +\infty$.*

Обозначают: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют *расходящимся*.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty; b]$, то аналогично определяется и обозначается *несобственный интеграл I рода для функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty; b]$* :

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на \mathbb{R} , то **несобственным интегралом I рода для функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty; +\infty)$** называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (2)$$

где c – любое число.

Несобственный интеграл от $f(x)$ по промежутку $(-\infty; +\infty)$ называется **сходящимся**, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

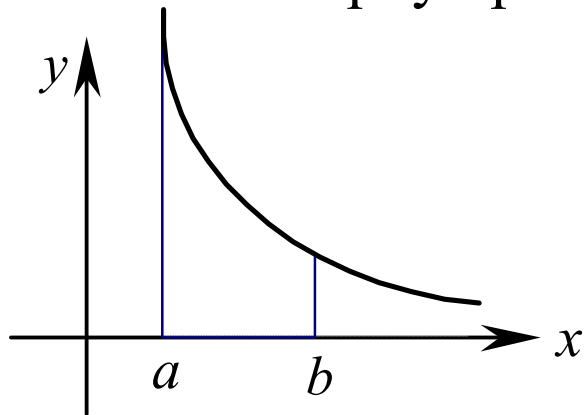
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty; +\infty)$ называется **расходящимся**.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку $[a; +\infty)$. Для интегралов по промежутку $(-\infty; b]$ и $(-\infty; +\infty)$ все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; +\infty)$.

Тогда $\int_a^b f(x) dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



\Rightarrow Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a; +\infty)$ сходится и равен S , то полагают, что область, ограниченная Ox , кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S .

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a; +\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a; +\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) \quad (3)$$

Обозначим $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}$.

Тогда (3) примет вид:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a). \quad (4)$$

Формулу (4) называют **обобщением формулы Ньютона – Лейбница** для несобственных интегралов по промежутку $[a; +\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty; b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_0^{+\infty} \cos x dx;$$

$$2) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n};$$

$(a > 0)$

$$3) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx;$$

$(\alpha \neq 0)$

$$4) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2};$$

$$5) \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x} dx;$$

$(\alpha \neq 0)$

$$6) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

$$7) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}.$$

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

ТЕОРЕМА 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a; +\infty)$ и

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in [c; +\infty) \quad (\text{где } c \geq a).$$

Тогда:

1) если $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ – сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится,

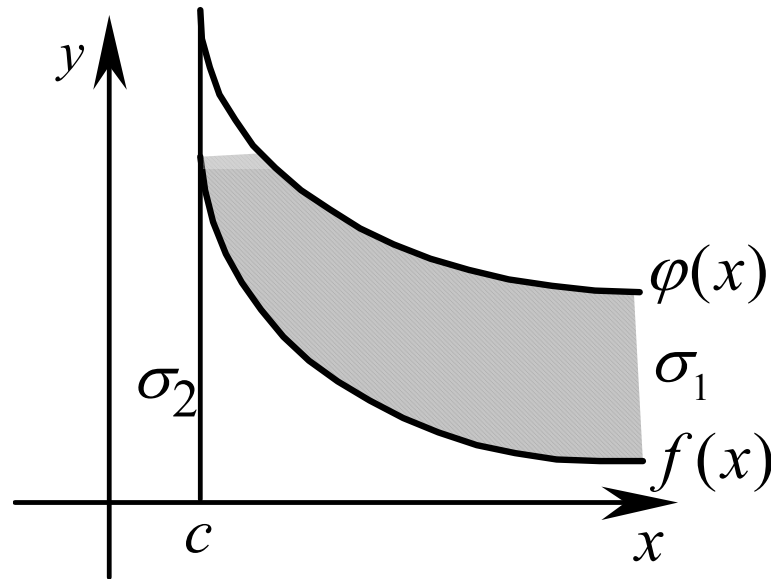
причем

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} \varphi(x) dx;$$

2) если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – расходится, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ тоже расходится.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть (σ_1) и (σ_2) – области в xOy , ограниченные осью Ox , прямой $x = c$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ соответственно. Неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ (где $x \in [c; +\infty)$) означает, что область (σ_2) является частью области (σ_1) .



- \Rightarrow 1) если область (σ_1) имеет площадь, то ее часть (σ_2) тоже имеет площадь;
- 2) если говорить о площади области (σ_2) нельзя, то и для содержащей ее области (σ_1) тоже нельзя говорить о площади.

ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неотрицательны на $[a; +\infty)$.

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h$, где h – действительное число, отличное

от нуля, то интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечания.

- 1) Теорема 2 остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и СОХРАНЯЮТ ЗНАК на $[a; +\infty)$.
- 2) При использовании теорем 1 и 2 в качестве «эталонных» интегралов обычно используют следующие несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad - \quad \begin{cases} \text{сходится, при } n > 1, \\ \text{расходится при } n \leq 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \quad \begin{cases} \text{сходится, при } \alpha > 0, \\ \text{расходится при } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость интегралы

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}; \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$.

Тогда определены несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{è} \quad \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (признак абсолютной сходимости).

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже будет сходиться.

*При этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.*

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{è} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то об интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, а $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – сходится, то

интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют **условно сходящимся**.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a; b_1]$, где $a \leq b_1 < b$.

\Rightarrow существует $\int_a^{b_1} f(x) dx$

Имеем: $\int_a^{b_1} f(x) dx = I(b_1)$, $D(I) = [a; b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Несобственным интегралом II рода по промежутку $[a; b]$ от функции $f(x)$, неограниченной в точке b , называется предел функции $I(b_1)$ при $b_1 \rightarrow b - 0$.*

Обозначают: $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \quad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют **сходящимся**.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют **расходящимся**.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +(-)\infty$,

то аналогично определяется и обозначается **несобственный интеграл II рода по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной в точке a** :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \rightarrow a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b] \setminus \{c\}$ и $x = c$ – точка бесконечного разрыва функции, то **несобственным интегралом II рода от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$** называют

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6)$$

Несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной внутри этого отрезка, называется **сходящимся**, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

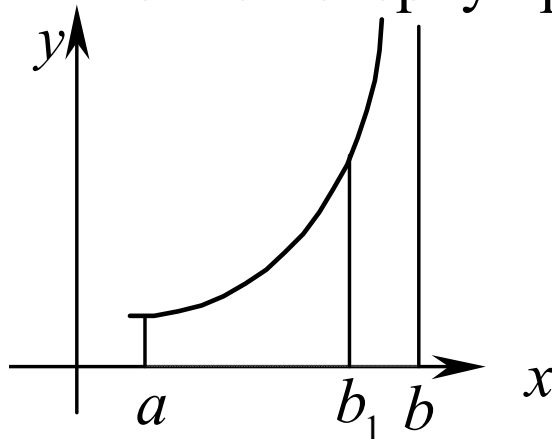
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ называется **расходящимся**.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку $[a;b]$ от функции, неограниченной в точке b . Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b)$.

Тогда $\int_a^{b_1} f(x) dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



\Rightarrow Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a; b]$ сходится и равен S , то полагают, что область, ограниченная Ox , кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь S .

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b)$.

Тогда $\forall b_1 \in [a;b)$ имеем

$$\int_a^{b_1} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} (F(b_1) - F(a))$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1) - F(a) \quad (7)$$

Ранее вводили обозначение: $F(b-0) = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1) - F(a) = F(b-0) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-0} = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) - F(a). \quad (8)$$

Формулу (8) называют **обобщением формулы Ньютона – Лейбница** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке b .

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке a , доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a+0}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a+0} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}; \quad 2) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}; \quad 3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

При использовании теорем 1 и 2 в роли «эталонных» интегралов используют интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится, при } n < 1, \\ \text{расходится при } n \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится, при } n < 1, \\ \text{расходится при } n \geq 1. \end{cases}$$

Замечание.

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, но $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} f(x)dx = A$,

то число A называют **главным значением** этого **несобственного интеграла**.

2) **Главным значением** расходящегося интеграла $\int_a^b f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $c \in [a; b]$ называют число A , равное

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right) = A.$$

Обозначают соответственно: $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $v.p. \int_a^b f(x)dx$.