

Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: *Применение определенного интеграла.  
Приближенное вычисление  
определенного интеграла*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

## II) Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями

Пусть кривая  $(\ell)$  не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

где  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  – непрерывно дифференцируемые на  $[\alpha; \beta]$ .

ЗАДАЧА. Найти длину  $\ell$  кривой  $(\ell)$ .

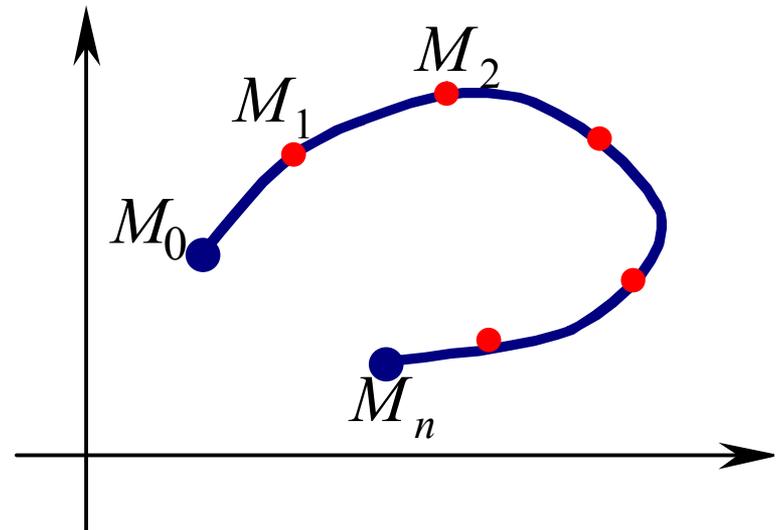
### РЕШЕНИЕ

Разобьем  $[\alpha; \beta]$  на  $n$  частей точками

$$t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$$

$\Rightarrow (\ell)$  разобьется на части  $(\ell_1), (\ell_2), \dots, (\ell_n)$  точками  $M_0, M_1, \dots, M_n$

$\Rightarrow \ell = \sum \ell_i$ , где  $\ell_i$  – длина  $(\ell_i)$



Рассмотрим дугу ( $\ell_i$ ).

Если ( $\ell_i$ ) мала, то

$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где  $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ ,

$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) .$$

По теореме Лагранжа

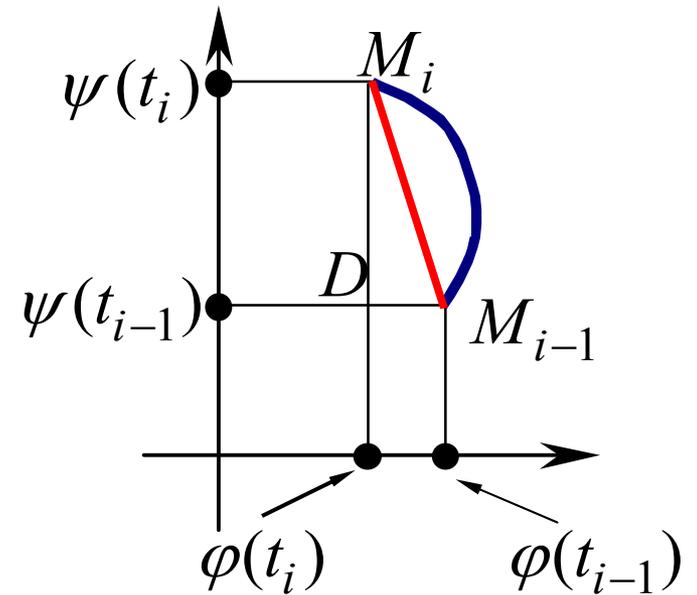
$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta t_i ,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\zeta_i) \cdot \Delta t_i$$

где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$ ,  $\xi_i, \zeta_i$  — точки между  $t_{i-1}$  и  $t_i$ .

$$\Rightarrow \ell_i \approx \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$



Рассмотрим

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

и

$$s = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Доказано, что  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (s - \tilde{s}) = 0$ , где  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ .

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i}_{\text{интегральная сумма для } \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \text{ на } [\alpha; \beta]}$$

$$\Rightarrow \ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (1)$$

### III) Плоская кривая в полярных координатах

Пусть  $r = r(\varphi)$  – непрерывно дифференцируема на  $[\alpha; \beta]$ .

ЗАДАЧА: найти длину кривой  $r = r(\varphi)$ , где  $\varphi \in [\alpha; \beta]$ .

РЕШЕНИЕ.

Имеем:  $x = r \cdot \cos\varphi$ ,  $y = r \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$  параметрические уравнения кривой

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi.$$

Тогда

$$x' = r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi,$$

$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2.$$

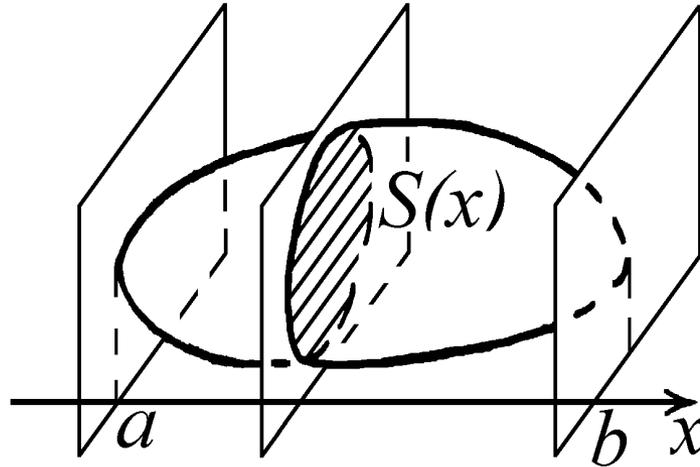
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

### 3. Вычисление объема тела

#### I) По площадям параллельных сечений

Пусть  $(V)$  – замкнутая и ограниченная область в  $Oxyz$  (тело).  
Пусть  $S(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ .



Тогда объем тела  $(V)$  : 
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

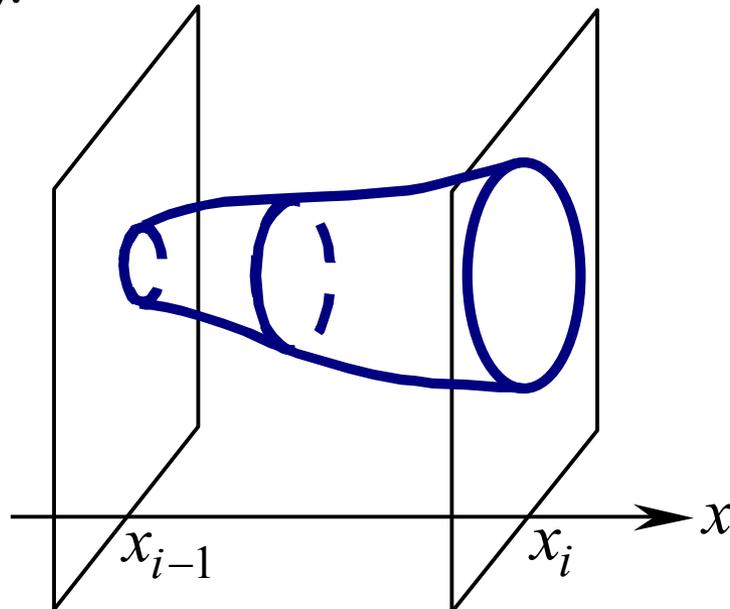
1) Разобьем  $[a;b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

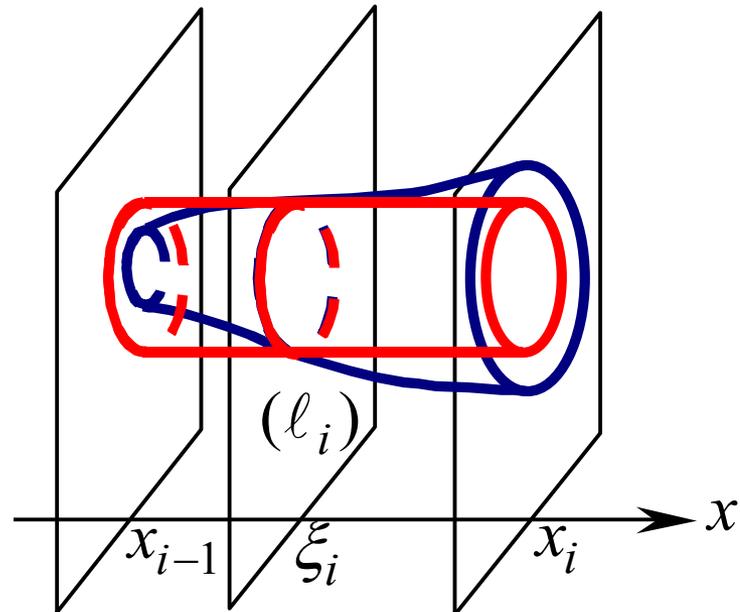
Плоскости  $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$  разобьют  $(V)$  на части  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$

$$\Rightarrow V = \sum V_i, \text{ где } V_i - \text{объем } (V_i).$$

2) Рассмотрим  $(V_i)$ .



Выберем  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$



Построим цилиндр с направляющей  $(\ell_i)$ .

Его объем:  $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Если  $\Delta x_i$  — мала, то

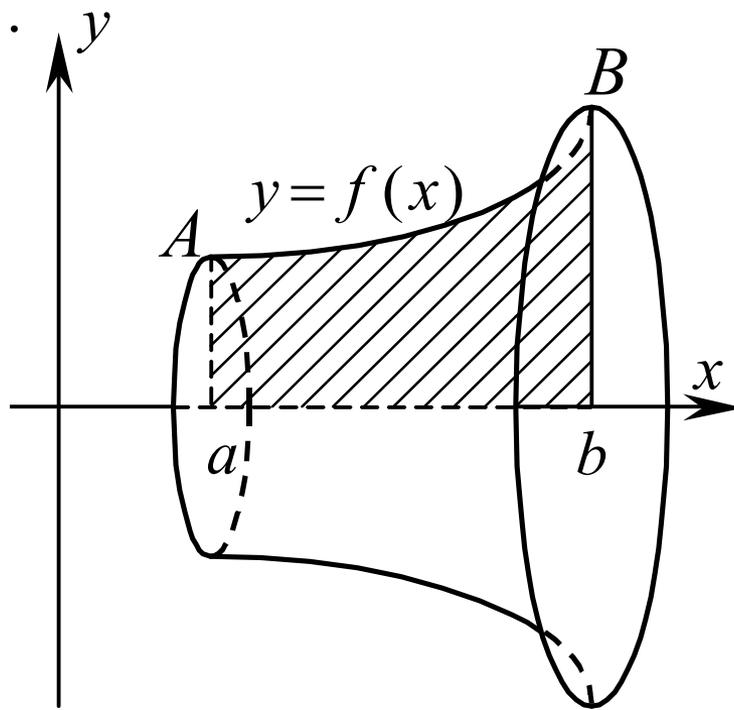
$$V_i \approx S(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Следовательно,  $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , где  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

$$\Rightarrow V = \int_a^b S(x) dx.$$

### III) Объем тела вращения

Пусть  $(V)$  – тело, которое получается в результате вращения вокруг  $Ox$  криволинейной трапеции с основанием  $[a;b]$ , ограниченной  $y = f(x)$ .



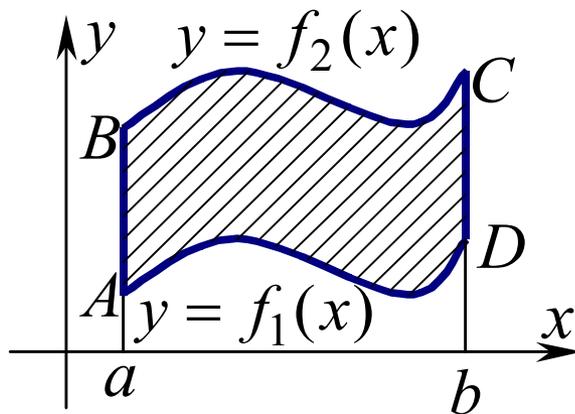
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пусть  $(V)$  – тело, полученное в результате вращения вокруг  $Ox$  области  $(\sigma)$ , ограниченной линиями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

где  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [a; b]$ .



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left( [f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

## 4. Физические приложения определенного интеграла

### **I) *Пройденный путь***

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью  $v(t)$   
Тогда путь  $S$ , пройденный точкой за время  $[T_1 ; T_2]$ , равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

### **II) *Масса отрезка***

Пусть  $\gamma(x)$  – плотность распределения массы на отрезке  $[a;b]$ .

Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx.$$

### III) *Работа переменной силы*

Пусть под действием силы  $\vec{F}$  тело движется вдоль оси  $Ox$  из точки  $x_1 = a$  в точку  $x_2 = b$ .

Если  $F = F(x)$  и  $\vec{F} \uparrow Ox$ , то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении  $[a;b]$  на части, величина, соответствующая отрезку  $[a;b]$ , складывается из величин, соответствующих его частям).