Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле. Применение определенного интеграла***

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ (или $[b;a]$) *и функция* $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет условиям*

1) $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке с концами* α *и* β;
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *и значения* $\varphi(t)$ *при изменении* t *от* α *до* β *не выходят за пределы отрезка с границами* a *и* b.

Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ *интегрируема на* $[\alpha;\beta]$ (или $[\beta;\alpha]$) *и справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Формула (3) называется ***формулой замены переменной в определенном интеграле***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Замечание. Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt,$$

где $t=\varphi(x)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x}+12e^x+34}$

3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a;b]$ *. Тогда существуют интегралы*

$$\int_a^b u\,dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v\,du$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

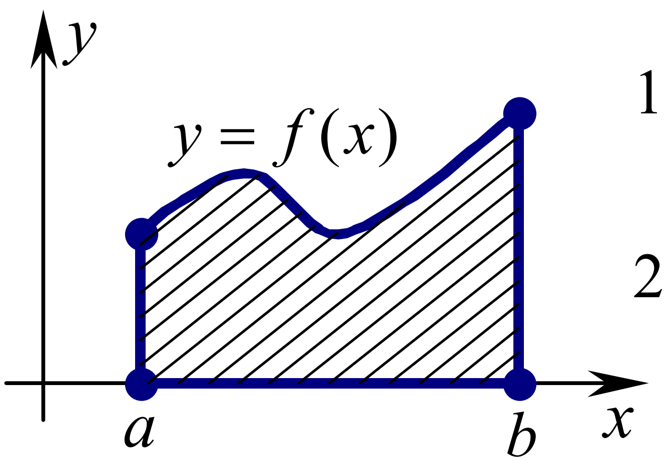
§3. Приложения определенных интегралов

1. Площадь плоской области

I) ***Плоская область в декартовой системе координат***

В ДСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейная трапеция***.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

а) 

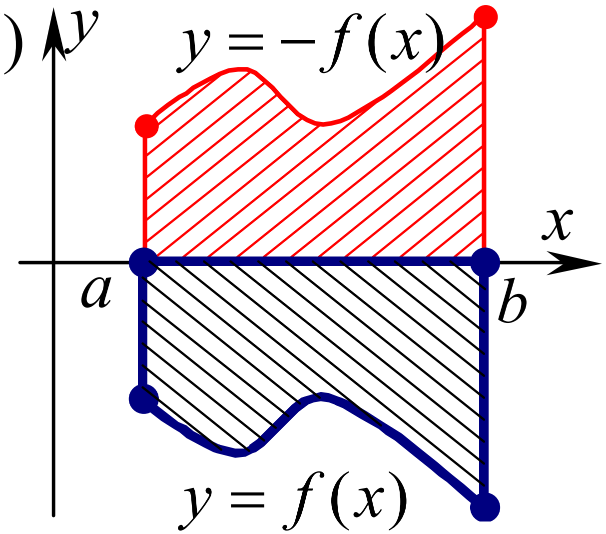
1) $$S = \int_a^b f(x)dx;$$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt,$$

где $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

б)



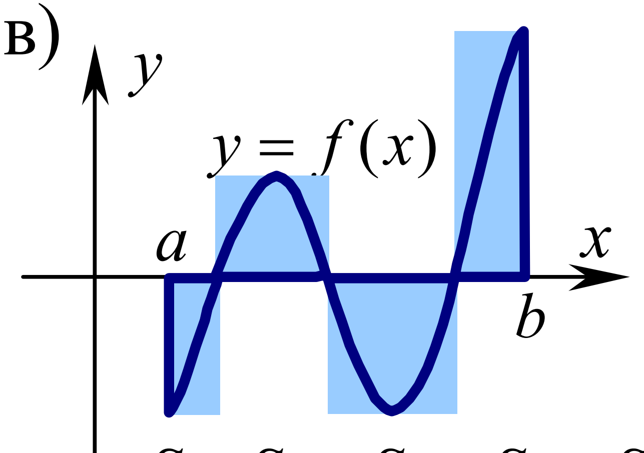
1) $$S = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $$S = -\int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\,dt,$$

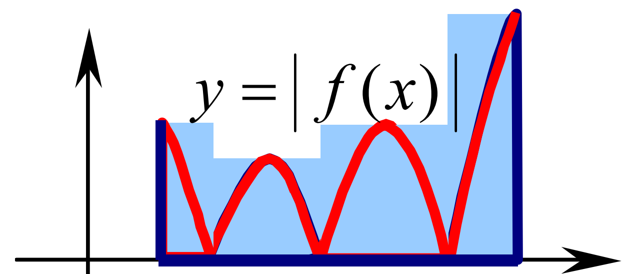
где $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

в)



$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$\Rightarrow$



$$S = \int_a^b | f(x) | dx,$$

Кроме того, в ДСК с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, правильной в направлении оси Oy .

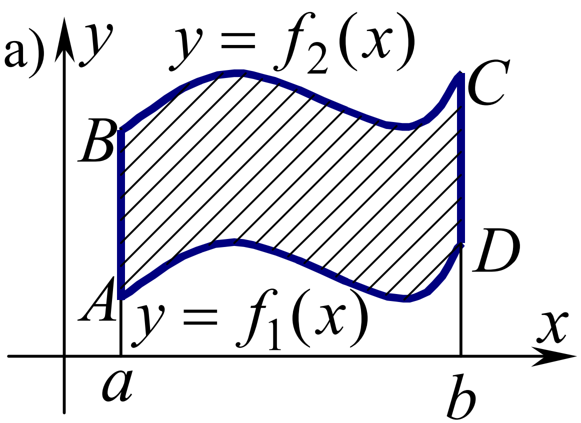
Правильной в направлении оси Oy является область (σ), ограниченная линиями

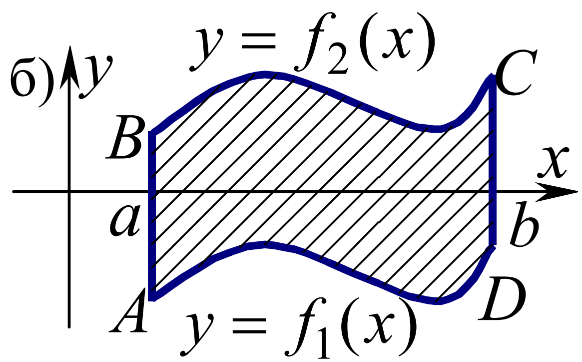
$$x = a\ ,\ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

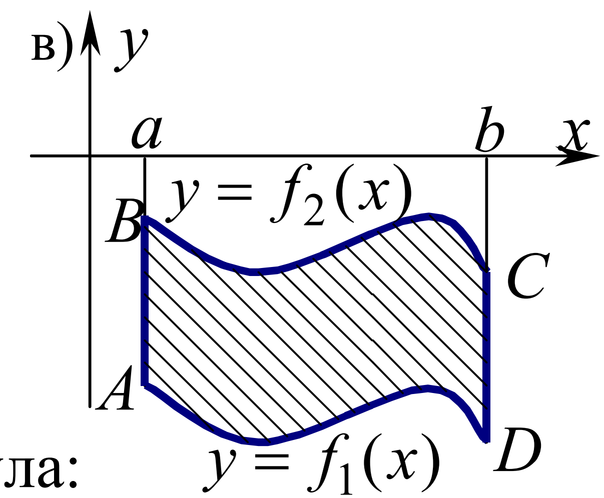
где $a < b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области (σ) на плоскости:







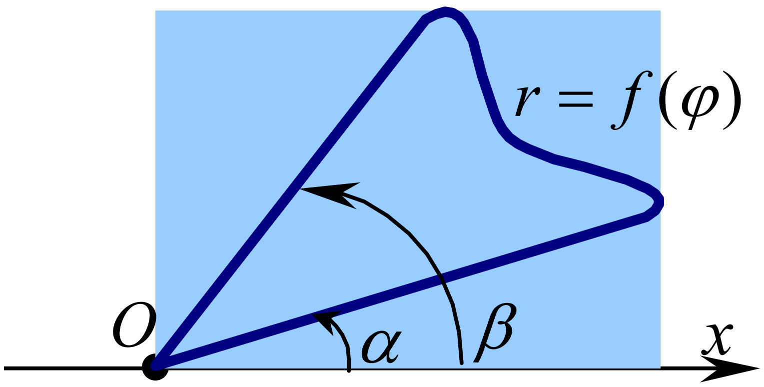
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx .$$

II) ***Плоская область в полярной системе координат***

В ПСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейный сектор***.

Криволинейным сектором называется область, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$.



Его площадь находится по формуле: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Разобьем $[\alpha;\beta]$ на n частей точками

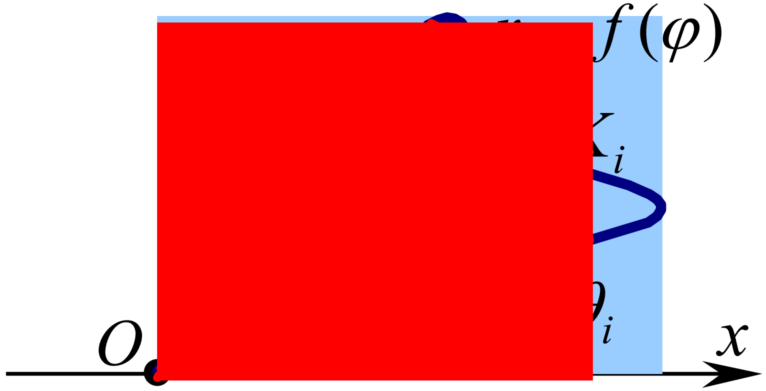
$$\varphi_0 = \alpha\ ,\ \ \varphi_1\ ,\ \ \varphi_2\ ,\ \ \dots\ ,\ \ \varphi_n = \beta\ ,$$

где $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n$.

$\Rightarrow$ Сектор (σ) разобьется на n частей (σ_1) , (σ_2) , … , (σ_n) лучами $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_n$.

$\Rightarrow$ $S = \sum S_i$, где S_i – площадь части (σ_i)

2) На каждом $[\varphi_{i-1}\ ;\ \varphi_i]$ выберем произвольную точку θ_i .



Заменим криволинейный сектор (σ_i) круговым сектором с радиусом $OK_i = f(\theta_i)$.

Имеем: $\mathrm{S}_i \approx \mathrm{S}_{\text{круг. сек.}} = \dfrac{\pi \cdot [f(\theta_i)]^2}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i$,

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ – величина угла сектора (σ_i)

$$\Rightarrow \quad S_i \approx \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i \quad \text{и} \quad S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i .$$

Тогда $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot [f(\theta_i)]^2 \cdot \Delta\varphi_i}$, где $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\varphi_i$.

интегральная сумма для $\dfrac{1}{2}[f(\varphi)]^2$
на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$

2. Длина плоской кривой

I) ***Плоская кривая в декартовой системе координат***

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a;b]$.
ЗАДАЧА: найти длину ℓ кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$.

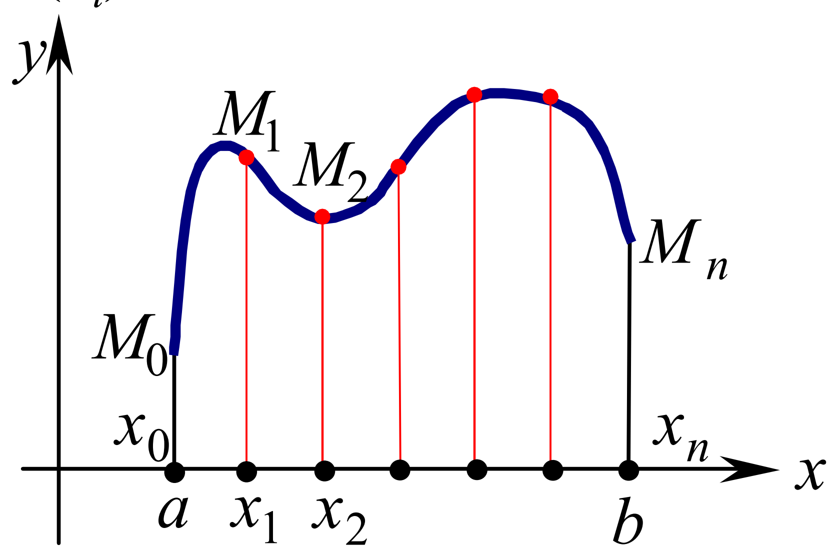
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ )$$

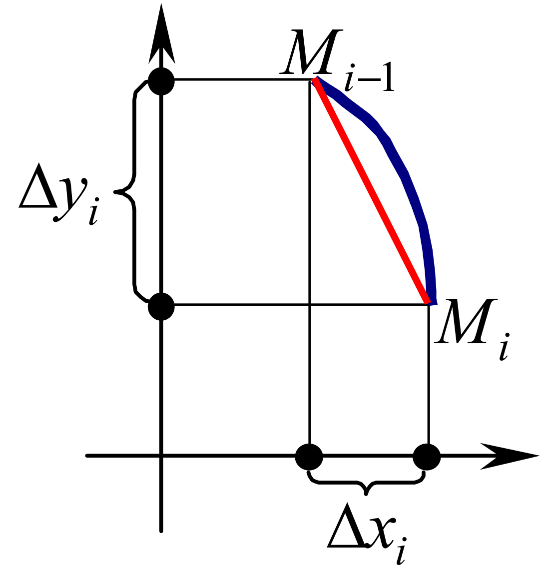
$\Rightarrow$ (ℓ) разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1,\ldots, M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то



$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i ,$$

где ξ_i – точка между x_{i-1} и x_i.

$$\Rightarrow \ \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ \ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i , \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i .$$

$$\Rightarrow \ \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$