

Математический анализ

Раздел: Неопределенный интеграл

Тема: *Интегрирование рациональных дробей*

Лектор Рожкова С.В.

2024 г.

§23. Интегрирование рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Рациональной дробью** называется отношение 2-х многочленов, т.е. функция вида $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$,

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется **правильной**.

В противном случае (т.е. если $m \geq n$) дробь называется **неправильной**.

Неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)},$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен степени $m - n$,

$P_r(x)$ – многочлен степени $r < n$.

(многочлены $Q(x)$ и $P_r(x)$ получаются в результате деления с остатком $P_m(x)$ на $P_n(x)$)

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Простейшими рациональными дробями* I, II, III, IV типа называются соответственно правильные дроби вида $\frac{A}{x+a}$, $\frac{A}{(x+a)^m}$, $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$, где $D = b^2 - 4c < 0$, m – натуральное число ($m > 1$).

1) Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \int \frac{dx}{x+a} = A \int \frac{d(x+a)}{x+a} = A \ln|x+a| + C.$$

2) Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m} dx = A \int \frac{d(x+a)}{(x+a)^m} = A \frac{(x+a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

3) Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$$
$$D = b^2 - 4c < 0$$

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$(x^2 + bx) + c = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} \right) - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} + c,$$

$$-\frac{b^2}{4} + c = \frac{-b^2 + 4c}{4} = -\frac{D}{4} > 0,$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2} \right)^2 + q^2.$$

б) Сделаем замену: $t = x + \frac{b}{2}$.

В результате интеграл будет приведен к виду $\int \frac{At + M}{t^2 + q^2} dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int \frac{At + M}{t^2 + q^2} dt = \int \frac{At}{t^2 + q^2} dt + \int \frac{M}{t^2 + q^2} dt.$$

В первом – внесем под знак дифференциала знаменатель,

$$\begin{aligned} \int \frac{At}{t^2 + q^2} dt &= A \int \frac{t}{t^2 + q^2} \cdot \frac{d(t^2 + q^2)}{2t} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} = \\ &= \frac{A}{2} \ln(t^2 + q^2) + C; \end{aligned}$$

Второй интеграл – табличный:

$$\int \frac{M}{t^2 + q^2} dt = \frac{M}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C.$$

г) Вернемся к исходной переменной x .

4) Интегрирование простейших дробей IV типа:

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + q^2.$$

б) Сделаем замену: $t = x + b/2$

В результате интеграл будет приведен к виду $\int \frac{At + M}{(t^2 + q^2)^m} dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int \frac{At + M}{(t^2 + q^2)^m} dt = A \int \frac{tdt}{(t^2 + q^2)^m} + M \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^m}.$$

Первый из этих интегралов найдем, внося $t^2 + q^2$ под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t^2 + q^2)^m} &= \int \frac{t}{(t^2 + q^2)^m} \cdot \frac{d(t^2 + q^2)}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q^2)}{(t^2 + q^2)^m} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 + q^2)^{-m+1}}{-m+1} + C. \end{aligned}$$

Для интеграла $J_m = \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^m}$ справедлива рекуррентная формула:

$$J_m = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{2(1-m)} \cdot \frac{t}{(t^2 + q^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2q^2(1-m)} J_{m-1}, \quad (1)$$

где $J_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^{m-1}}$.

Применив формулу (1) последовательно $(m-1)$ интеграл J_m сведется к табличному интегралу

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + q^2} = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C$$

г) Вернемся к исходной переменной x .

2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть $\frac{P_r(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Запишем $P_n(x)$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_i)^{k_i} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_sx + c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, s$

ТЕОРЕМА 1.

Любая правильная рациональная дробь единственным образом представима в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении (2) имеет место следующее соответствие:

1) каждому множителю вида $(x - a)^k$ соответствует сумма из k простейших дробей вида

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

где A_1, A_2, \dots, A_k – некоторые числа;

2) каждому множителю вида $(x^2 + bx + c)^t$ соответствует сумма из t простейших дробей вида

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_t x + C_t}{(x^2 + bx + c)^t}$$

где $B_1, B_2, \dots, B_t, C_1, C_2, \dots, C_t$ – некоторые числа.

ПРИМЕРЫ.

$$1) \frac{x^3 + 2x - 1}{(x - 2) \cdot (x + 1)^3} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2} + \frac{A_4}{(x + 1)^3};$$

$$2) \frac{x + 1}{x^2(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x + 1}{x^2(x - 1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x - 1} + \frac{A_4}{(x - 1)^2};$$

$$3) \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2};$$

$$4) \frac{x^4 + 1}{(x + 2)(x^2 + x + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 3} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + x + 3)^2}.$$

Разложение конкретной правильной рациональной дроби в сумму простейших обычно производят **методом неопределенных коэффициентов**, который представляет собой следующую последовательность действий:

- 1) записываем знаменатель $P_n(x)$ в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей;
- 2) записываем разложение дроби в сумму простейших с неопределенными коэффициентами в числителях (по теореме 1);
- 3) складываем простейшие дроби и приравниваем многочлен $Q_r(x)$, получившийся в числителе, числителю исходной дроби $P_r(x)$;
- 4) из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов $Q_r(x)$ и $P_r(x)$, получим систему r линейных уравнений для нахождения r неизвестных коэффициентов.

Замечание.

1) Систему для нахождения неизвестных коэффициентов можно получить из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ и другим способом.

А именно, придавая x r конкретных значений, получим из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ r уравнений, связывающие неизвестные коэффициенты.

Такой метод получения системы уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов называется ***методом частных значений***.

2) Разлагать правильную рациональную дробь в сумму простейших **не следует**, если есть более простой способ найти интеграл.

Например, в интеграле $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

лучше внести под знак дифференциала знаменатель.

В интеграле $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

лучше предварительно сделать замену переменной $x^2 = t$.