

Домашнее задание по теме: «Степенные ряды: область сходимости, разложение функции в степенной ряд»

Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{(2n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}}$. **Ответ.** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. **Ответ.** $(1; 3]$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \cdot x^n$. **Ответ.** $x = 0$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} \cdot (x-1)^n$. **Ответ.** \mathbb{R} .

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$. **Ответ.** $[-1; 0)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}$. **Ответ.** $[-5; -3]$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$. **Ответ.** $[-4; -2]$.

Разложить в ряд по степеням $x - x_0$:

8) 2843. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$. **Ответ.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-3)^n}{3^{n+1}}$.

9) 2855. $y = e^{2x}$, $x_0 = 0$. **Ответ.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$.

10) 2857. $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$, $x_0 = 0$. **Ответ.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

11) 2860. $y = \cos^2 x$, $x_0 = 0$. **Ответ.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

12) 2866. $y = \sqrt[3]{8-x^3}$, $x_0 = 0$.

Ответ. $2 - \frac{x^3}{3 \cdot 2^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4) \cdot x^{3n}}{3^n \cdot 2^{3n-1} \cdot n!}$.

13) $y = \frac{2}{x^2 + 2x + 5}, x_0 = -1.$

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^{2n}}{2^{2n+1}}.$

14) $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}, x_0 = 0.$

Ответ. $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n.$

15) $y = \ln(x^2 + 11x + 10), x_0 = 0.$

Ответ. $\ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^n} \right) \cdot \frac{x^n}{n}.$