

Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: *Применение определенного интеграла.
Приближенное вычисление
определенного интеграла*

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

II) Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями

Пусть кривая (ℓ) не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha; \beta]$.

ЗАДАЧА. Найти длину ℓ кривой (ℓ) .

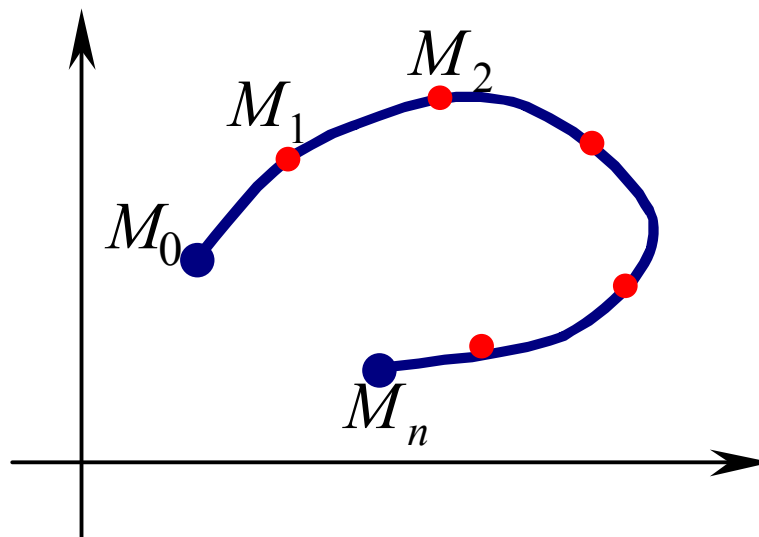
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[\alpha; \beta]$ на n частей точками

$$t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$$

$\Rightarrow (\ell)$ разобьется на части $(\ell_1), (\ell_2), \dots, (\ell_n)$ точками M_0, M_1, \dots, M_n

$\Rightarrow \ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то

$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$,

$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) .$$

По теореме Лагранжа

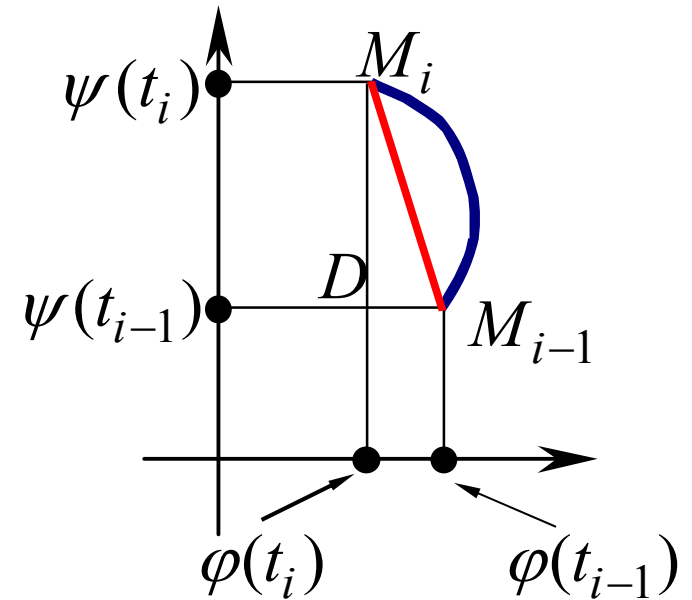
$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta t_i ,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\zeta_i) \cdot \Delta t_i$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$, ξ_i, ζ_i — точки между t_{i-1} и t_i .

$$\Rightarrow \ell_i \approx \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$



Рассмотрим

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

и

$$s = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Доказано, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (s - \tilde{s}) = 0$, где $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$.

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i}_{\text{интегральная сумма для } \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \text{ на } [\alpha; \beta]}$$

$$\Rightarrow \ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (1)$$

III) Плоская кривая в полярных координатах

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha; \beta]$.

ЗАДАЧА: найти длину кривой $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

РЕШЕНИЕ.

Имеем: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

\Rightarrow параметрические уравнения кривой

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi.$$

Тогда

$$x' = r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi,$$

$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2.$$

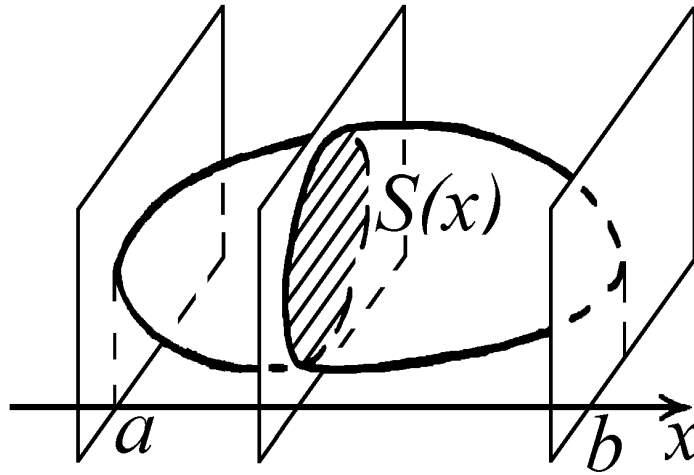
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

3. Вычисление объема тела

I) По площадям параллельных сечений

Пусть (V) – замкнутая и ограниченная область в $Oxyz$ (тело).
Пусть $S(x)$ ($a \leq x \leq b$) – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox .



Тогда объем тела (V) :
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

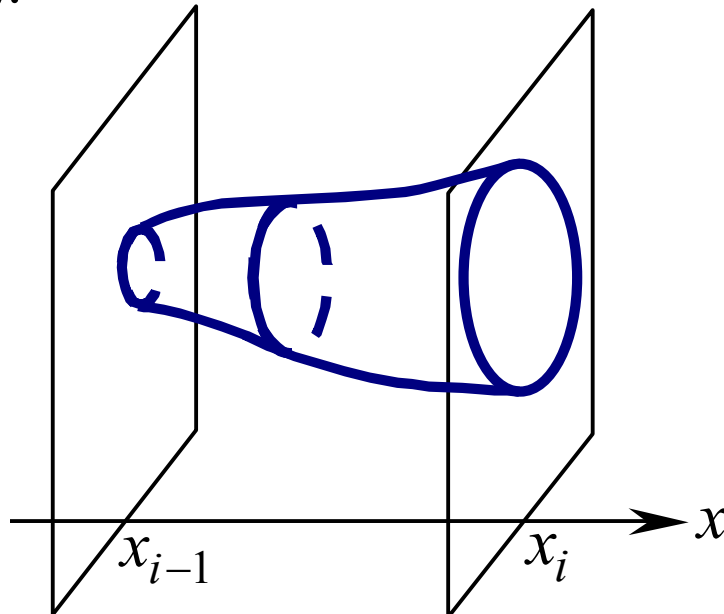
1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

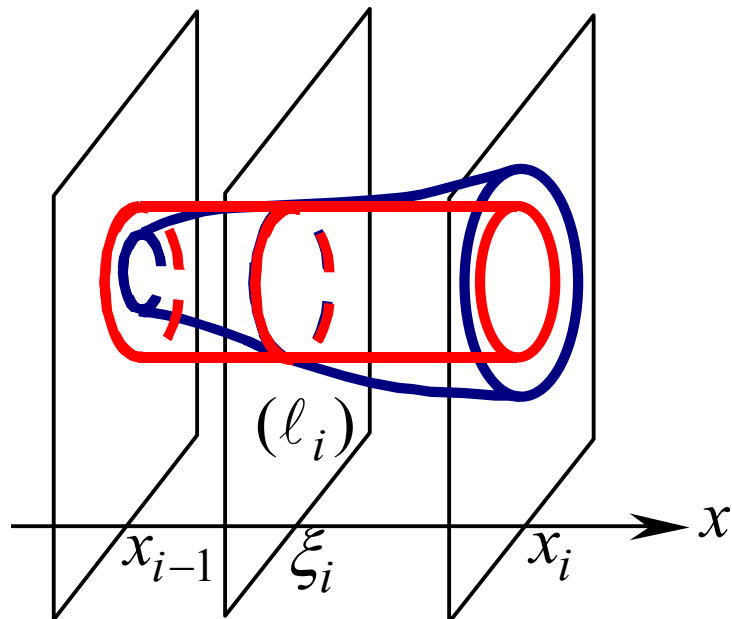
Плоскости $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ разобьют (V) на части $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$

$$\Rightarrow V = \sum V_i, \text{ где } V_i - \text{объем } (V_i).$$

2) Рассмотрим (V_i) .



Выберем $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$



Построим цилиндр с направляющей (ℓ_i) .

Его объем: $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина $[x_{i-1}; x_i]$.

Если Δx_i — мала, то

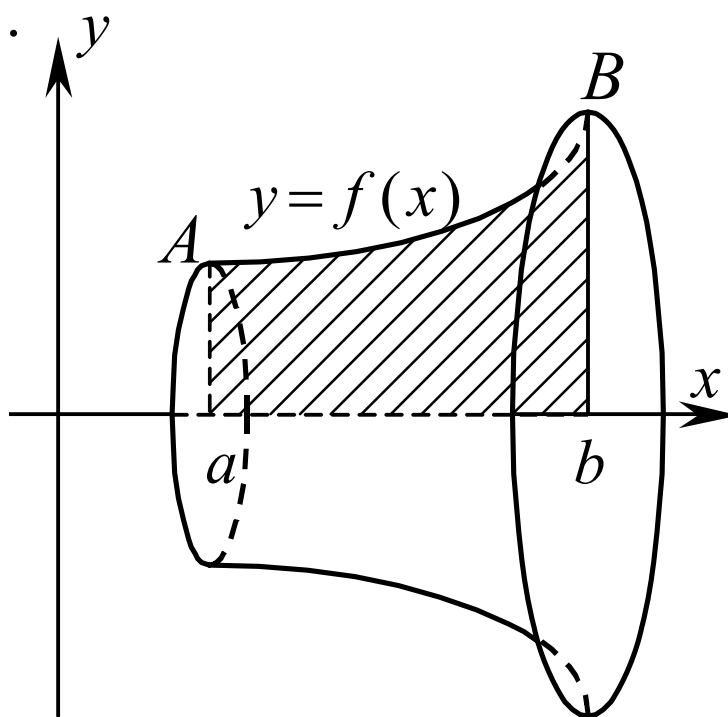
$$V_i \approx S(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Следовательно, $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, где $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

$$\Rightarrow V = \int_a^b S(x) dx.$$

III) Объем тела вращения

Пусть (V) – тело, которое получается в результате вращения вокруг Ox криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной $y = f(x)$.



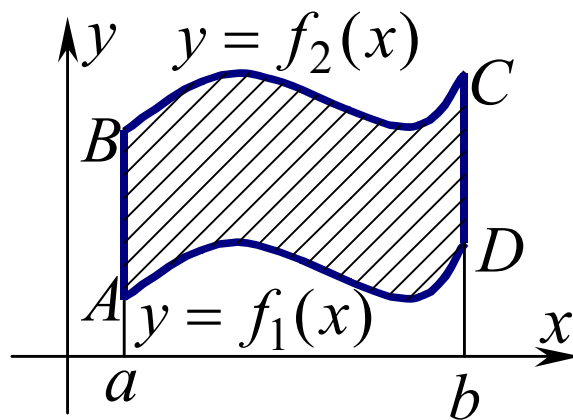
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пусть (V) – тело, полученное в результате вращения вокруг Ox области (σ) , ограниченной линиями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

где $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [a; b]$.



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

4. Физические приложения определенного интеграла

I) *Пройденный путь*

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью $v(t)$
Тогда путь S , пройденный точкой за время $[T_1 ; T_2]$, равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

II) *Масса отрезка*

Пусть $\gamma(x)$ – плотность распределения массы на отрезке $[a;b]$.

Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx.$$

III) *Работа переменной силы*

Пусть под действием силы \vec{F} тело движется вдоль оси Ox из точки $x_1 = a$ в точку $x_2 = b$.

Если $F = F(x)$ и $\vec{F} \uparrow Ox$, то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении $[a;b]$ на части, величина, соответствующая отрезку $[a;b]$, складывается из величин, соответствующих его частям).

§4. Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть $y = f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и ее первообразная не является элементарной. Требуется найти

$$\int_a^b f(x)dx.$$

1. Формула прямоугольников

Разобьем $[a;b]$ на n равных отрезков длины h точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Пусть $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Составим суммы

$$S_n = y_0h + y_1h + y_2h + \dots + y_{n-1}h,$$

$$\tilde{S}_n = y_1h + y_2h + y_3h + \dots + y_nh,$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ – длина отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

S_n и \tilde{S}_n – интегральные суммы для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx S_n = h \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{S}_n = h \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n). \quad (2)$$

Пусть R_n – модуль разности между точным значением определенного интеграла и его приближенным значением.

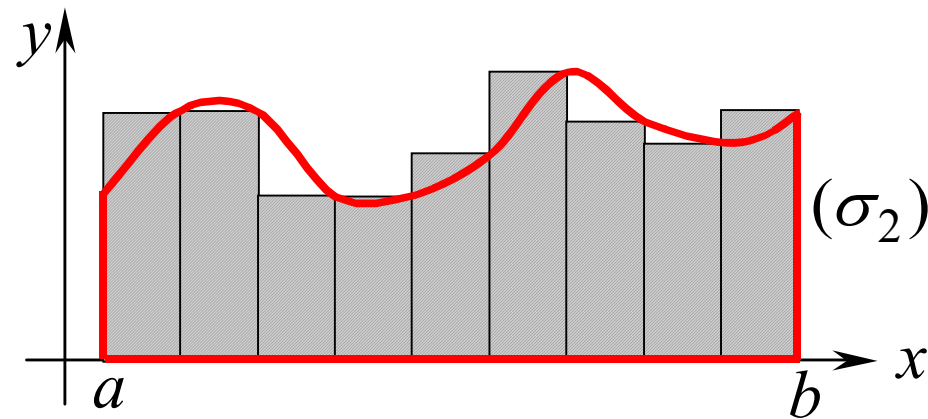
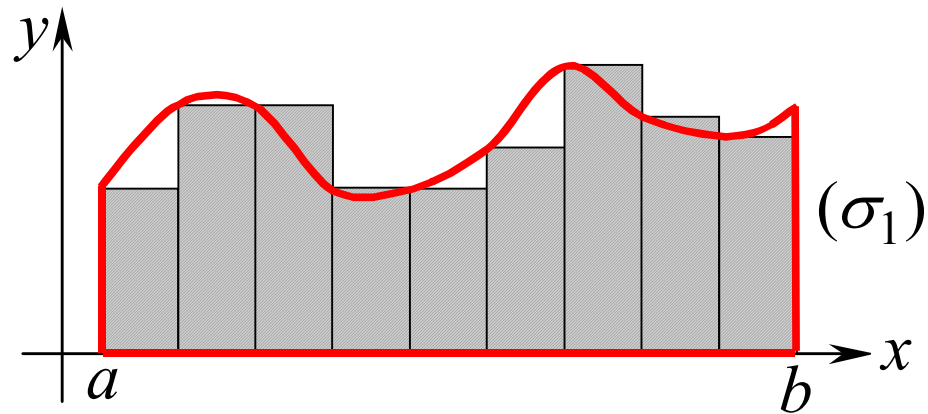
Тогда

$$R_n \leq \frac{M_1}{2n} (b - a)^2,$$

где $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$.

Формулы (1) и (2) называются **формулами прямоугольников**.

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то с геометрической точки зрения (1) и (2) означают, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из прямоугольников (области (σ_1) и (σ_2) соответственно).



2. Формула трапеций

Разобьем $[a;b]$ на n равных отрезков длины h точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Пусть $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})), \quad (3)$$

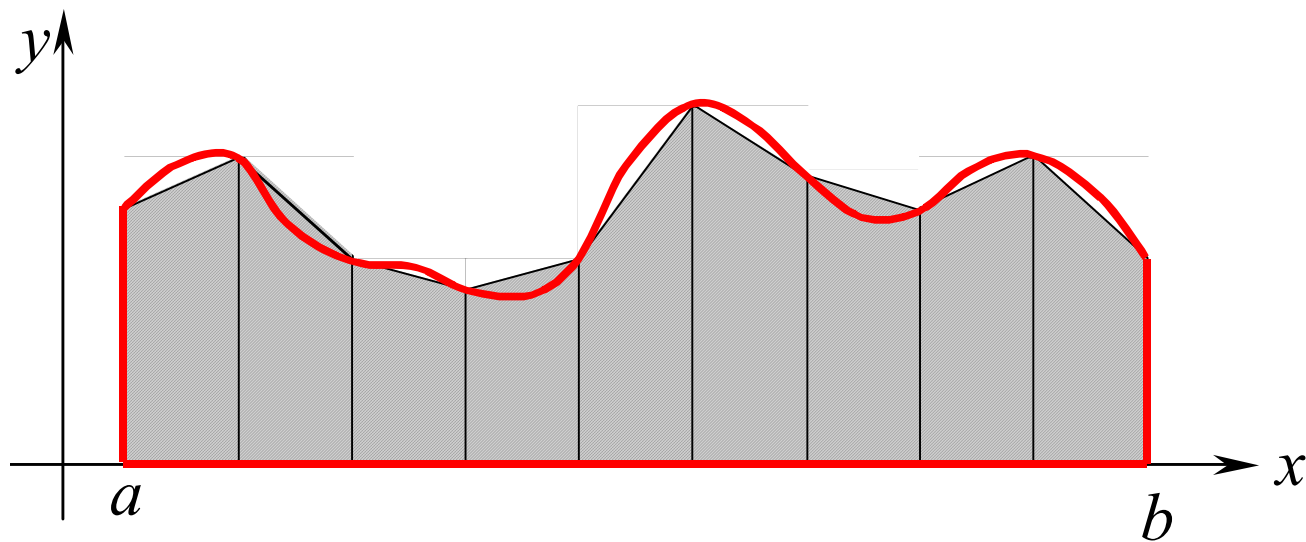
где $h = \frac{b-a}{n}$ — длина отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для формулы (3) $R_n \leq \frac{M_2}{12n^2} (b-a)^3$,

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Формула (3) называется *формулой трапеций*.

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то с геометрической точки зрения (3) означает, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из трапеций.



2. Формула Симпсона (формула парабол)

Разобьем $[a;b]$ на $n = 2m$ равных отрезков длины h точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Пусть $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})), \quad (4)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ — длина отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для формулы (4) $R_n \leq \frac{M_4}{180n^4} (b-a)^5$,

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Формула (4) называется **формулой Симпсона**.

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то с геометрической точки зрения (4) означает, что площадь соответствующей криволинейной трапеции заменяется площадью области, составленной из **параболических криволинейных трапеций** с основаниями $[x_{2i-2}; x_{2i}]$ (т.е. трапеций, ограниченных параболой).

