

Математический анализ

Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: *Основные теоремы
дифференциального исчисления.
Правило Лопиталя*

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

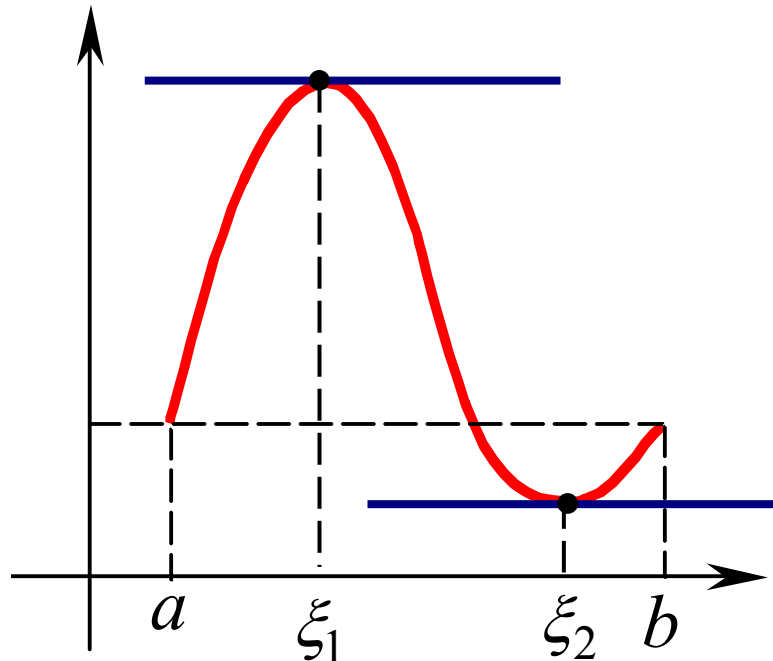
§8. Основные теоремы дифференциального исчисления

ТЕОРЕМА 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$.

Если $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет указанным в теореме 1 условиям, то на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка ξ такая, что в соответствующей ей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

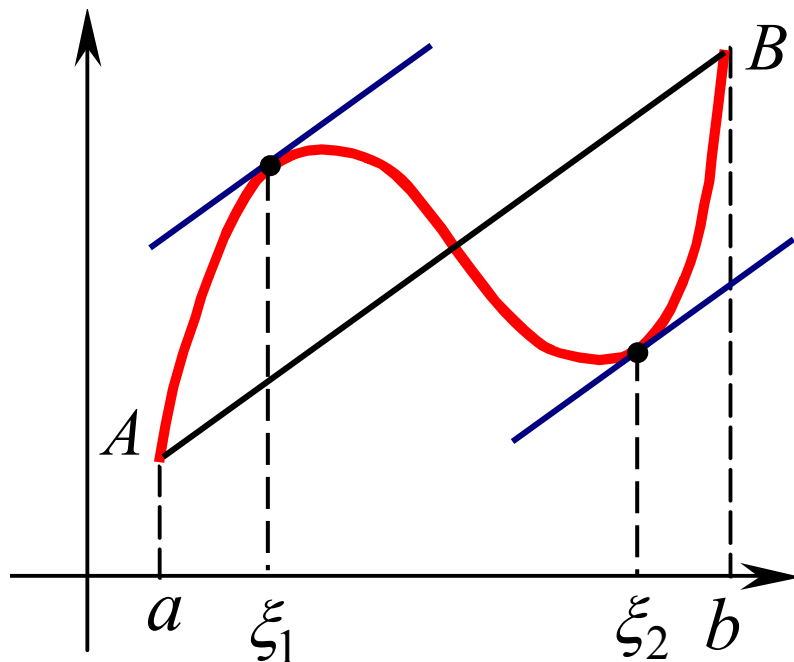
ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (2)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа.



Следовательно, если функция $y = f(x)$ удовлетворяет указанным в теореме 2 условиям, то на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка ξ такая, что в соответствующей ей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей AB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) . \quad (3)$$

Формулу (3) называют **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**.

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$.

*Функция $f(x)$ принимает на $[a; b]$ постоянное значение C
 $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и дифференцируемы на $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§9. Использование производной при вычислении пределов

ТЕОРЕМА 1 (Правило Лопиталья).

Пусть $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ и выполняются следующие условия:

- 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой δ -окрестности x_0 , за исключением возможно самой x_0 ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ (или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$);
- 3) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U^*(x_0, \delta)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный),

то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти два предела будут равны. Т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Замечания.

1) Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ тоже являются б.м. (б.б.) при $x \rightarrow x_0$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

2) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. При этом $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать.

ПРИМЕР. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

§10. Формула Тейлора

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда
$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. более высокого порядка чем Δx .

Пусть
$$\beta_1(\Delta x) = \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

Тогда
$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x,$$

где $\beta_1(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x. \quad (1)$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$,

$$\Rightarrow \Delta x = x - x_0$$

и формула (1) примет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_1 \cdot (x - x_0), \quad (2)$$

где $\beta_1(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Пусть $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_1 – дифференцируема в точке x_0 ,

$$\beta_1(x_0) = 0, \quad \beta_1'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}$$

⇒ Применяя к функции β_1 формулу (2) получим

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= \beta_1(x_0) + \beta_1'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0) = \\ &= \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

где $\beta_2(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Тогда из (2) для $f(x)$ получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \beta_2 (x - x_0)^2 \quad (3)$$

Пусть $y = f(x)$ трижды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_2 – дифференцируема в точке x_0 ,

$$\beta_2(x_0) = 0, \quad \beta_2'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}$$

\Rightarrow Применяя к функции β_2 формулу (2) получим

$$\begin{aligned} \beta_2(x) &= \beta_2(x_0) + \beta_2'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_3 \cdot (x - x_0) = \\ &= \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0) + \beta_3 \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

где $\beta_3(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Тогда из (3) для $f(x)$ получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \\ &+ \beta_3(x - x_0)^3 \end{aligned}$$

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то применим n раз формулу (2) к функции β_i и получим (4):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \beta_n(x-x_0)^n$$

где $\beta_n(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Формулу (4) называют **формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$** (в окрестности точки x_0).

Слагаемое

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называют **многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$** .

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ называют **остаточным членом формулы Тейлора**.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – **форма Пеано**;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то R_n можно записать в **форме Лагранжа** :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x .

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (5):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Формулу (5) называют **формулой Маклорена**.

Применение формулы Маклорена (Тейлора):

- 1) в приближенных вычислениях (значений функций, определенных интегралов и т.п.);
- 2) при нахождении пределов.