

Математический анализ

Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: *Производная функции*

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

Глава II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

§5. Производная функции

1. Определение производной функции.

Необходимое условие существования производной

Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in D(f)$.

Функция при этом получит приращение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$ (если этот предел существует и конечен), т.е.*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают: $y'(x_0)$, $\frac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа (слева) называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

(если этот предел существует и конечен).

Обозначают:

$y'_+(x_0)$, $f'_+(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$y'_-(x_0)$, $f'_-(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое и достаточное условие существования производной).

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 \Leftrightarrow$ в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие существования производной функции в точке).

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то функция $f(x)$ в этой точке непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание. Непрерывность функции в точке x_0 не является достаточным условием существования в этой точке производной функции.

Например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей области определения, но не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Соответствие $x_0 \rightarrow f'(x_0)$ является функцией, определенной на множестве $D_1 \subseteq D(f)$.

Ее называют **производной функции** $y = f(x)$ и обозначают

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}.$$

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ ее производной функции называют **дифференцированием функции** $f(x)$.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать по определению, что

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

2. Физический и геометрический смысл производной

1) Физический смысл производной.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная $f'(x)$ – скорость изменения величины y относительно величины x .*

ПРИМЕРЫ.

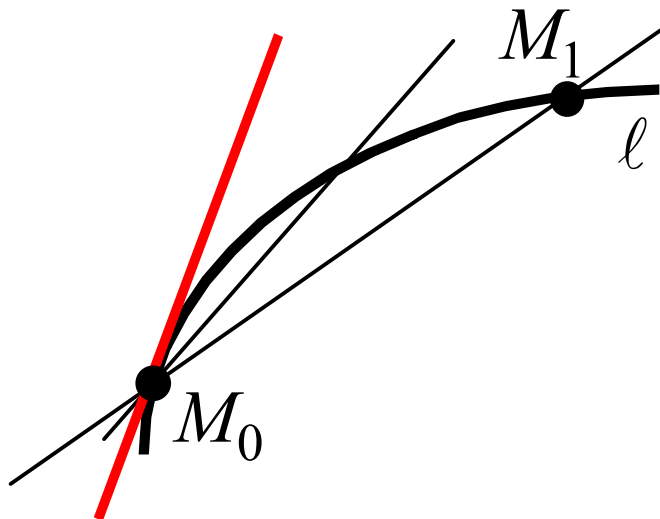
- а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t .
Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени t_0 .*
- б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t .
Тогда $q'(t_0)$ – *скорость изменения количества электричества в момент времени t_0 , т.е. сила тока в момент времени t_0 .*
- в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a ; x]$.
Тогда $m'(x_0)$ – *скорость изменения массы в точке x_0 , т.е. линейная плотность в точке x_0 .*

2) Геометрический смысл производной.

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ .

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках, называется **секущей**.

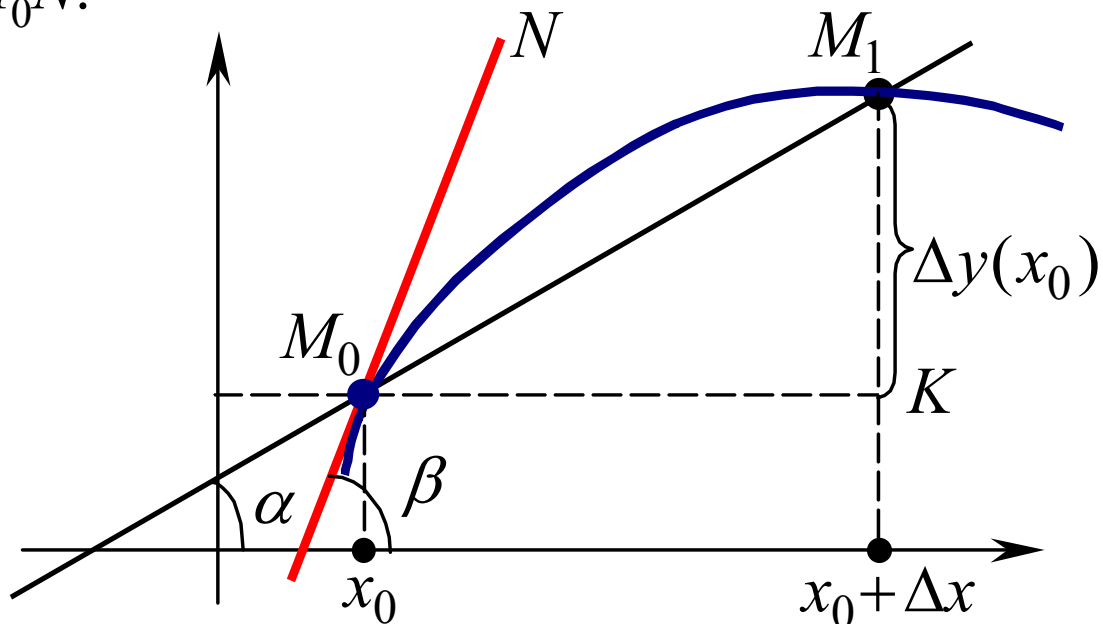
Касательной к кривой ℓ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 , если точка M_1 стремится к M_0 , двигаясь по кривой.



Очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$.

Пусть в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ она имеет не вертикальную касательную M_0N .



Таким образом, получили: $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.
(геометрический смысл производной функции в точке).

\Rightarrow Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Замечания.

- 1) Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0 , называется ***нормалью к кривой в точке M_0 .***

Т.к. для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \text{ если } f'(x_0) \neq 0.$$

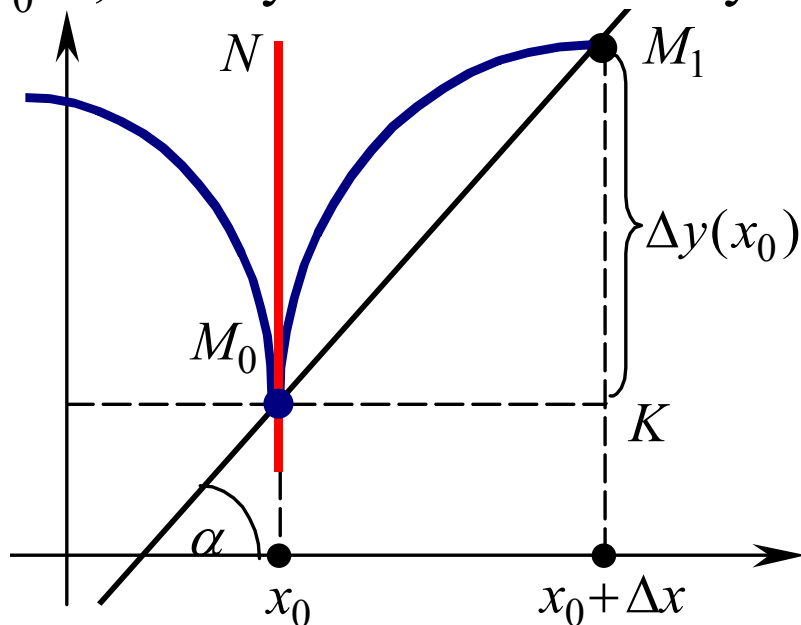
Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y = f(x_0),$$

а нормаль

$$x = x_0.$$

2) Пусть кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0 ; f(x_0))$ вертикальную касательную M_0N , α – угол наклона секущей M_0M_1 к Ox .



Таким образом, если кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0 ; f(x_0))$ вертикальную касательную, то функция $y = f(x)$ не имеет в точке x_0 производной.

Так как в соседних с M_0 точках кривая $y = f(x)$ имеет касательные и их угол наклона к оси Ox стремится к 90° при $\Delta x \rightarrow 0$, то x_0 является для функции $f(x)$ точкой разрыва II рода, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$$

3. Правила дифференцирования

1) Производная константы равна нулю, т.е.

$$C' = 0, \text{ где } C - \text{константа.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3) Производная произведения находится по правилу:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формула дифференцирования произведения может быть легко обобщена на случай большего числа множителей. Например,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак производной».

5) Производная дроби находится по правилу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0).$$

6) Если функция $\varphi(t)$ имеет производную в точке t , а функция $f(u)$ имеет производную в точке $u = \varphi(t)$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t , причем

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(правило дифференцирования сложной функции).

7) ТЕОРЕМА 3 (о производной обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , причем $f'(x_0) \neq 0$. Если существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то она имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Зная, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, получить формулы

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2) Используя теорему о производной обратной функции, доказать, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1; 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x.$$

По определению и с помощью правил дифференцирования находят производные основных элементарных функций (так называемая «таблица производных», см. на сайте).

Производная любой элементарной функции находится с помощью таблицы производных и правил дифференцирования.