Математический анализ

Раздел: Введение в анализ

Тема: ***Числовые последовательности***

(бесконечно большие последовательности и их свойства, теорема Вейерштрасса)

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

3. Бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой****, если* $\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n|>M\,,\ \forall n>N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество $\mathbb{R}$.

I способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty\,,\ \ \forall r\in\mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

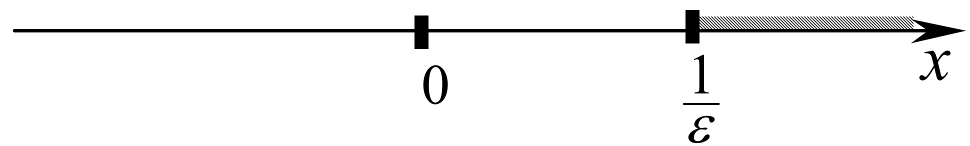
Множество $\mathbb{R}\cup\{-\infty\ ,+\infty\}$ и $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ называют ***расширенным множеством действительных чисел*** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$.

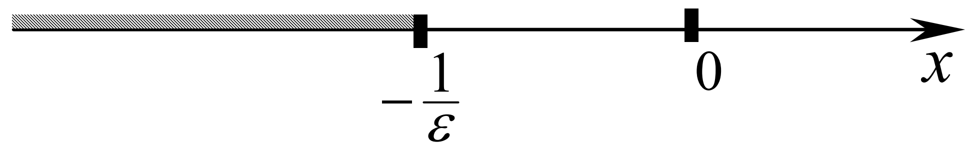
Элементы $-\infty$, $+\infty$, ∞ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε-окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, ∞ считают следующие множества:

$U(+\infty\ , \varepsilon) = \{\ x\in\mathbb{R}\ |\ \ x > 1/\varepsilon\}$



$U(-\infty\ , \varepsilon) = \{\ x\in\mathbb{R}\ |\ \ x < -1/\varepsilon\}$



$U(\infty\ , \varepsilon) = \{\ x\in\mathbb{R}\ |\ \ |\,x\,| > 1/\varepsilon\}$

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty, \quad x_n \to \infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к ∞».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M$, $\forall n > N$

$\Rightarrow$ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки + ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к + ∞».

2) $\{ x_n \}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = -x_n > M$, $\forall n > N$

$$\Rightarrow \; x_n < -M , \; \forall n > N$$

$\Rightarrow$ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки – ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к – ∞».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если $\{x_n\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_n\}$ – б.м.
Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_n\}$ – б.б.
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

2) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. того же знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО самостоятельно

3) Если $\{x_n\}$ – б.б., а $\{y_n\}$ – ограниченна, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) Если $\{x_n\}$ – б.б., $\{y_n\}$ – сходящаяся, причем

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a \neq 0$$

то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называют* ***отделимой от нуля****, если существуют число* $K > 0$ *и номер* N *такие, что* $|x_n| > K$, $\forall n > N$.

6) Если $\{x_n\}$ – ограниченная и отделимая от нуля, $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \ \ (|x_n| \le |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \le z_n \le y_n$.

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

(лемма о двух милиционерах для б.б. последовательностей)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4. Теорема Вейерштрасса. Число е

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$.

Число $b \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ называется ***верхней*** (***нижней***) ***границей множества X*** если

$$b \geq x \ (a \leq x), \quad \forall x \in X.$$

Если b является верхней границей множества X, то $\forall b_1 \geq b$ тоже является его верхней границей.

Если a является нижней границей множества X, то $\forall a_1 \geq a$ тоже является его нижней границей.

Наименьшая верхняя граница множества X называется его ***точной верхней границей*** (***супремумом***). Обозначают: $\sup X$

Наибольшая нижняя граница множества X называется его ***точной нижней границей*** (***инфимумом***). Обозначают: $\inf X$

Очевидно, что

а) $M = \sup X \iff c < M \quad \exists x_1 \in X$ такой, что $c \le x_1 \le M$;

б) $m = \inf X \iff c > m \quad \exists x_2 \in X$ такой, что $m \le x_2 \le c$.

ТЕОРЕМА 1.

Всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Всякое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

ТЕОРЕМА 2 (Вейерштрасса). *Монотонная и ограниченная числовая последовательность сходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Докажем, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится.

Предел последовательности $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ принято обозначать буквой e.

Число e – иррациональное. Доказано

$$e \approx 2{,}718281828459045 \ .$$