

# Линейная алгебра и аналитическая геометрия

---

Тема: *Плоскость*

---

Лектор Рожкова С.В.

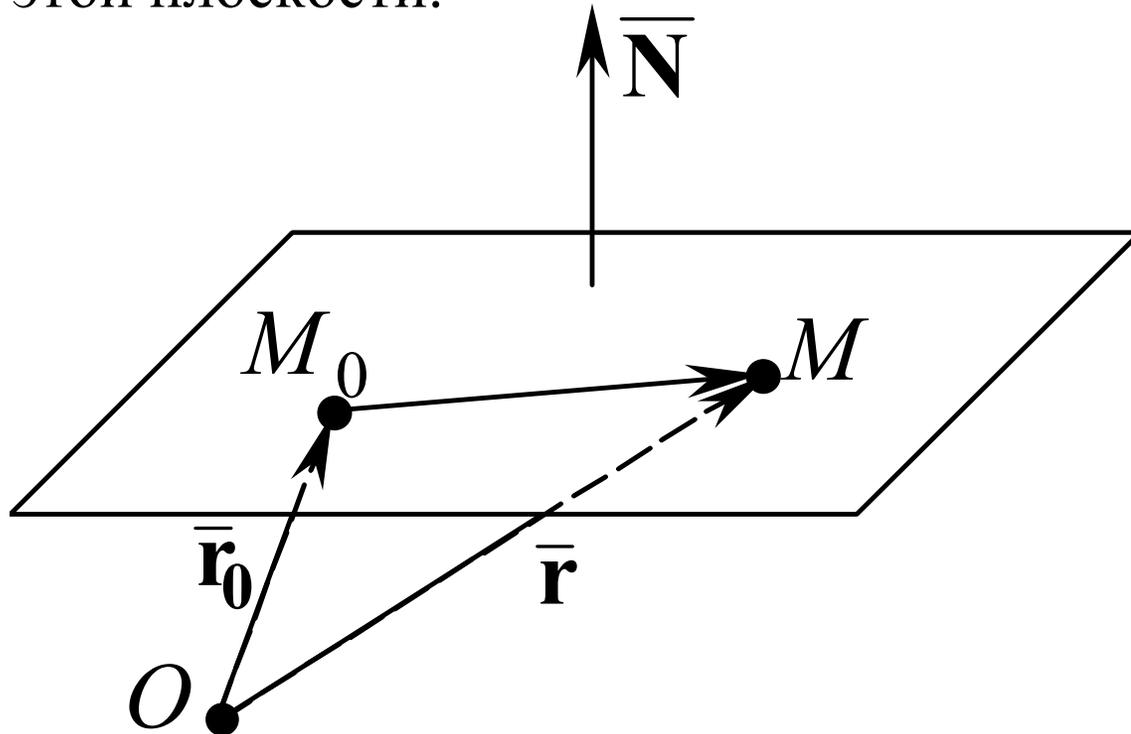
2012 г.

## § 13. Плоскость

### 1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , перпендикулярно вектору  $\vec{N} = \{A; B; C\}$ .

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют **нормальным вектором** этой плоскости.



Уравнения  $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$  (1\*)

и  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  (1)

называют **уравнением плоскости, проходящей через точку**

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  **перпендикулярно вектору**  $\bar{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$  (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения  $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0$  (2\*)

и  $Ax + By + Cz + D = 0$  (2)

называют **общим уравнением плоскости** (в векторной и координатной форме соответственно).

## ВЫВОДЫ:

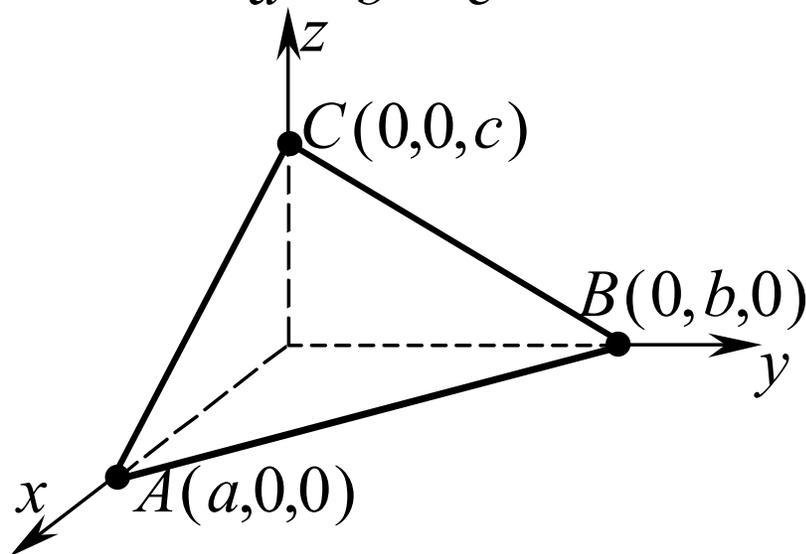
- 1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D$  – числа.
- 2) Коэффициенты  $A, B, C$  не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении  $Ax + By + Cz + D = 0$  все коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – **неполным**.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3)$$

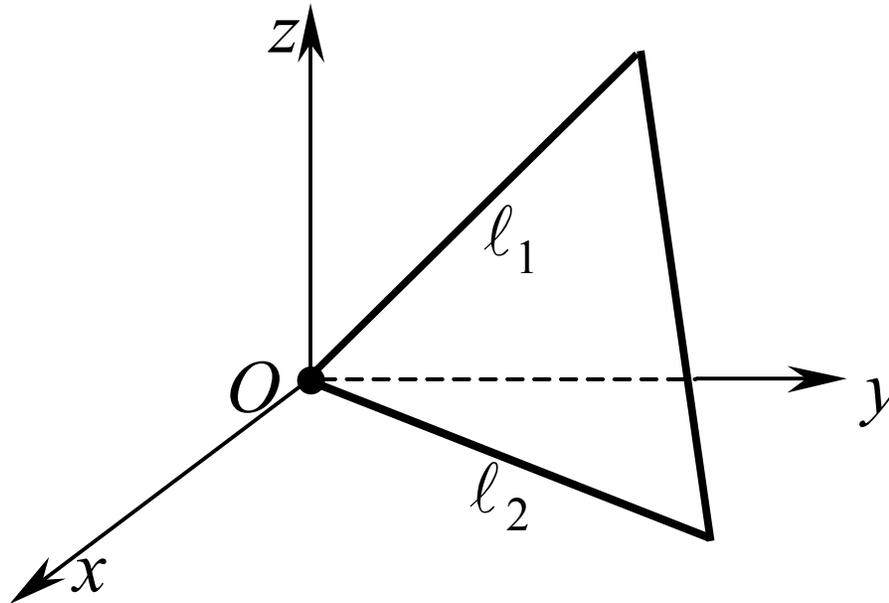


С геометрической точки зрения  $a$ ,  $b$  и  $c$  – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Уравнение (3) называют **уравнением плоскости в отрезках**.

2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  – ненулевые, а  $D = 0$ , т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат  $O(0;0;0)$ .



$l_1: By + Cz = 0$  (пересечение с плоскостью  $Oyz$ )

$l_2: Ax + By = 0$  (пересечение с плоскостью  $Oxy$ )

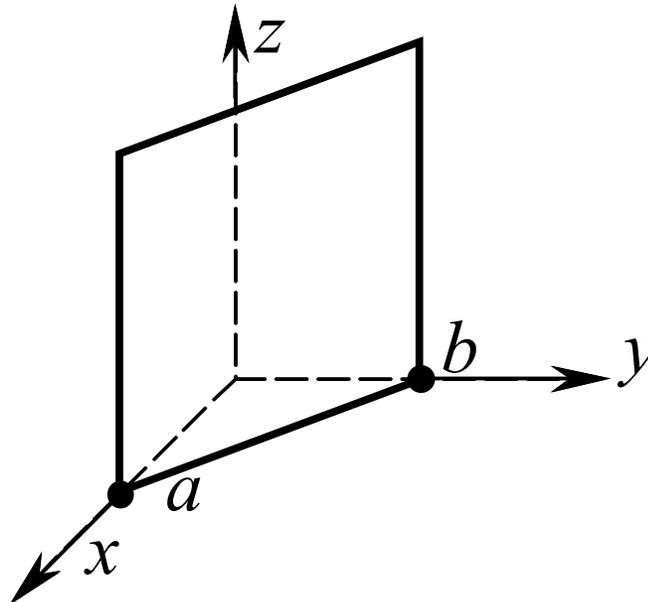
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов  $A$ ,  $B$  или  $C$  – нулевой, а  $D \neq 0$ , т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а)  $Ax + By + D = 0$     б)  $Ax + Cz + D = 0$     в)  $By + Cz + D = 0$ .

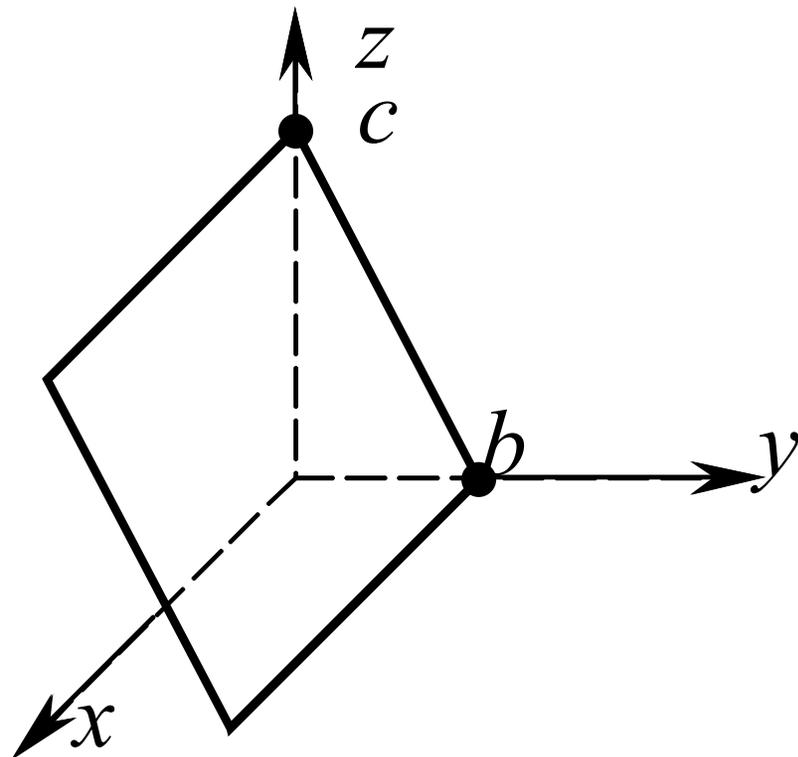
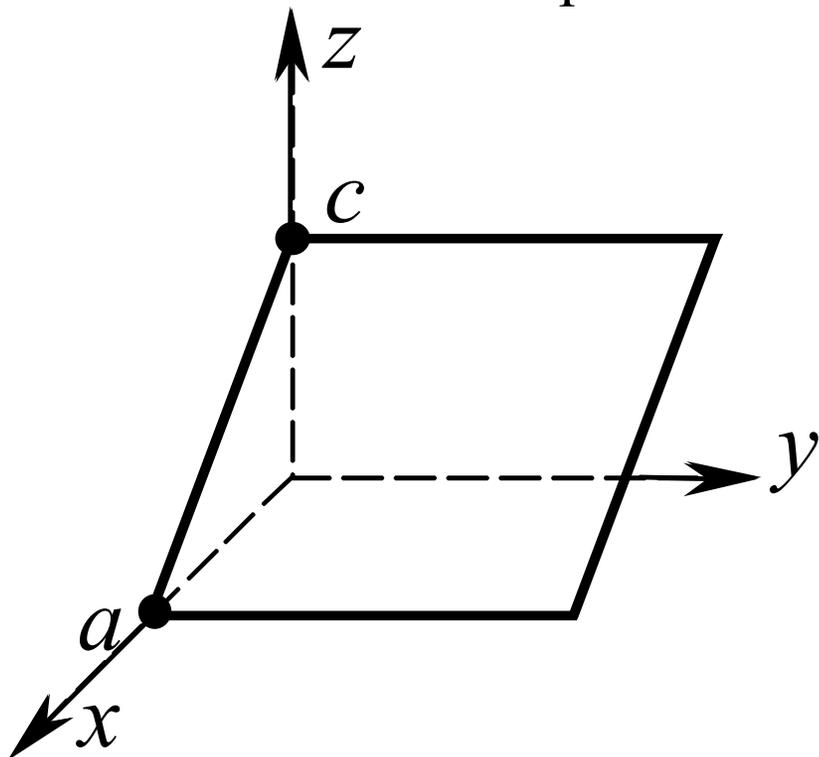
Эти уравнения можно записать соответственно в виде

а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$     б)  $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$     в)  $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на осях  $Ox$  и  $Oy$  отрезки  $a$  и  $b$  соответственно и параллельна оси  $Oz$ ;



- б) плоскость отсекает на осях  $Ox$  и  $Oz$  отрезки  $a$  и  $c$  соответственно и параллельна оси  $Oy$ ;
- в) плоскость отсекает на осях  $Oy$  и  $Oz$  отрезки  $b$  and  $c$  соответственно и параллельна оси  $Ox$ .



Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.*

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов  $A$ ,  $B$  или  $C$  – нулевые, а  $D \neq 0$ , т.е. уравнение плоскости имеет вид: а)  $Ax + D = 0$  или б)  $Bu + D = 0$  или в)  $Cz + D = 0$ .

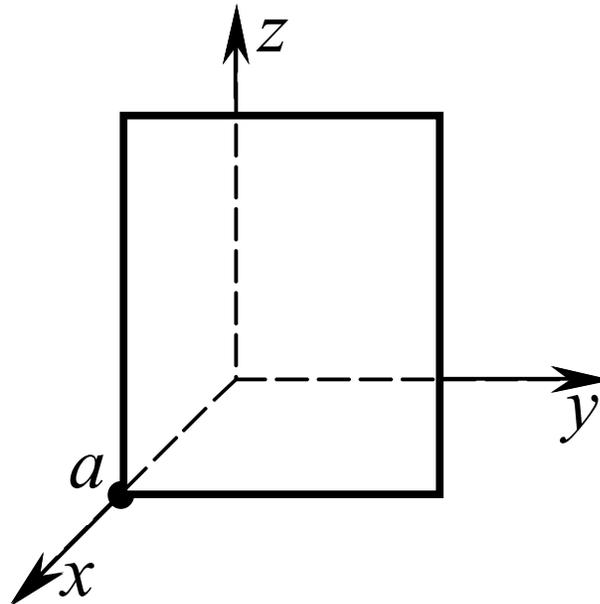
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а)  $\frac{x}{a} = 1$

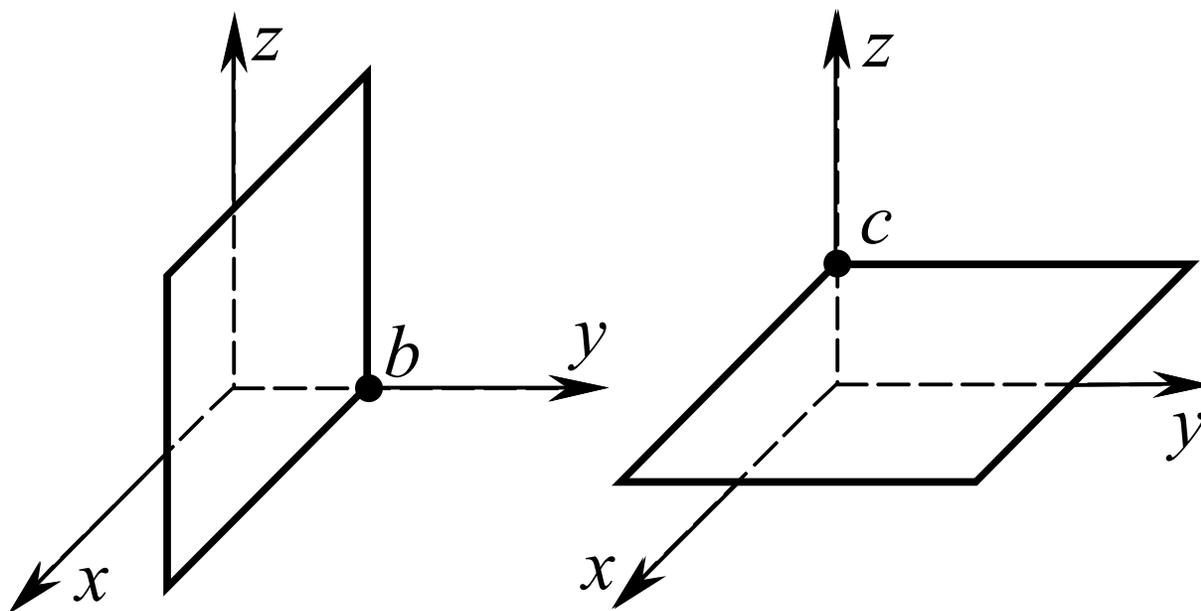
б)  $\frac{y}{b} = 1$

в)  $\frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на оси  $Ox$  отрезок  $a$  и параллельна осям  $Oy$  и  $Oz$  (т.е. параллельна плоскости  $Oyz$ );



- б) плоскость  $y / b = 1$  отсекает на  $Oy$  отрезок  $b$  и параллельна осям  $Ox$  и  $Oz$  (т.е. параллельна плоскости  $Oxz$ );
- в) плоскость  $z / c = 1$  отсекает на  $Oz$  отрезок  $c$  и параллельна осям  $Ox$  и  $Oy$  (т.е. параллельна плоскости  $Oxy$ ).

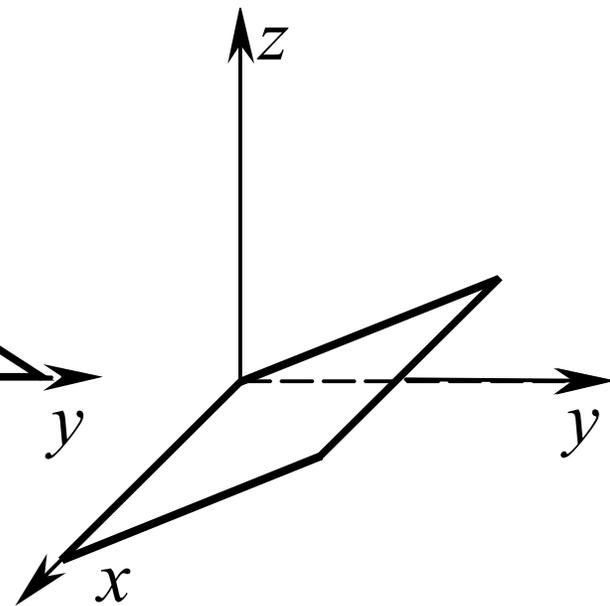
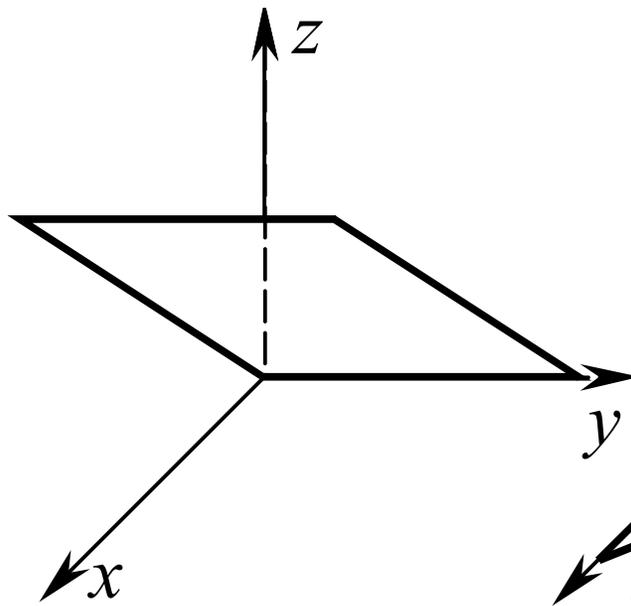
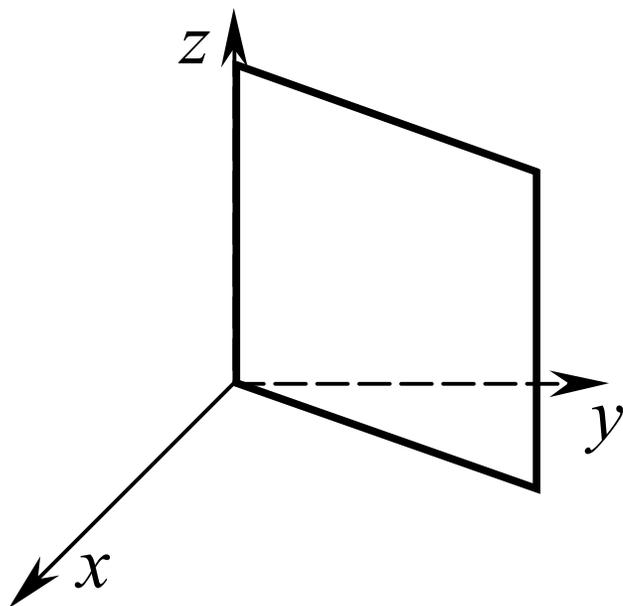


Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.*

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2)  $D = 0$  и один из коэффициентов  $A$ ,  $B$  или  $C$  тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а)  $Ax + By = 0$  или б)  $Ax + Cz = 0$  или в)  $By + Cz = 0$ .

*Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты*



б) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$\text{а) } Ax = 0 \quad \text{или} \quad \text{б) } By = 0 \quad \text{или} \quad \text{в) } Cz = 0.$$

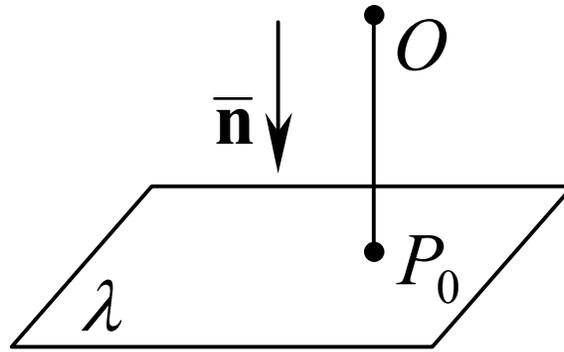
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а)  $x = 0$  – уравнение координатной плоскости  $Oyz$ ;

б)  $y = 0$  – уравнение координатной плоскости  $Oxz$ ,

в)  $z = 0$  – уравнение координатной плоскости  $Oxy$ .

*Замечание.* Пусть плоскость  $\lambda$  не проходит через  $O(0;0;0)$ .



Обозначим:

- 1)  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  – основание перпендикуляра, опущенного на  $\lambda$  из начала координат,
- 2)  $\bar{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$  – орт вектора  $\overline{OP_0}$ ,
- 3)  $p = \left| \overline{OP_0} \right|$  – расстояние от начала координат до  $\lambda$ .

Тогда уравнение  $\lambda$  можно записать в виде

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z + D = 0,$$

где  $D = -p$  (доказать самим).

Этот частный случай общего уравнения плоскости называется ***нормальным уравнением плоскости.***

## 2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1\*));

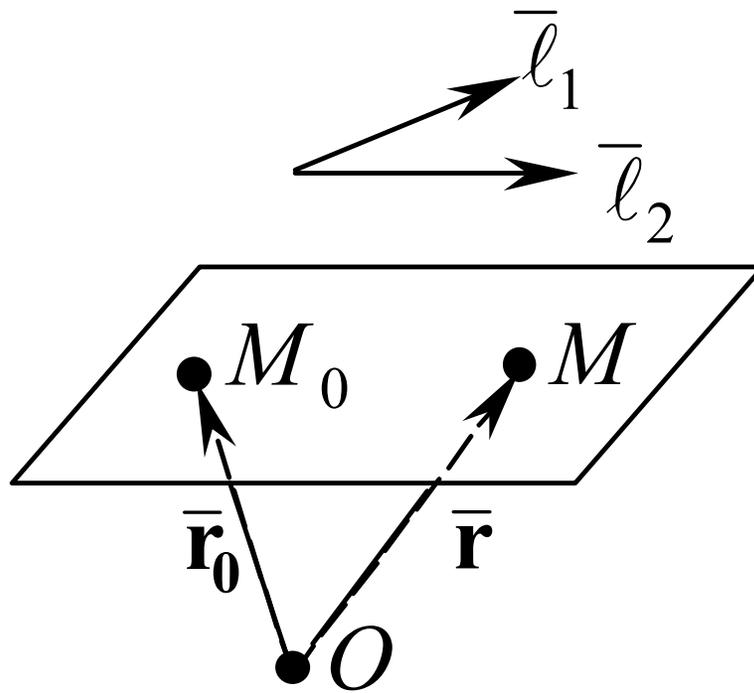
Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (3));

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

**1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам**

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , параллельно неколлинеарным векторам  $\vec{\ell}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$  и  $\vec{\ell}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$



Уравнения

$$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{l}}_1, \bar{\mathbf{l}}_2) = 0 \quad (4^*)$$

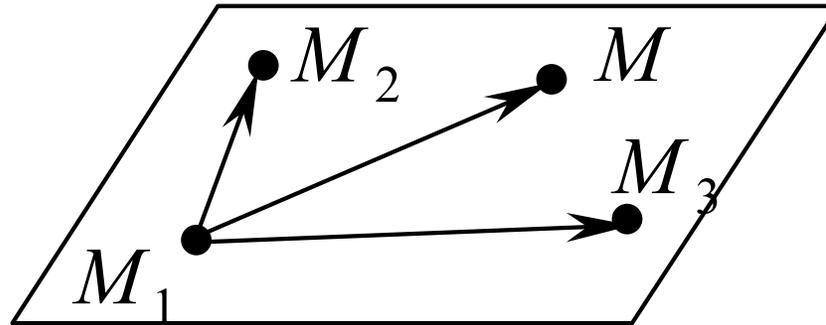
и

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

называют **уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , не лежащие на одной прямой.



Уравнения  $(\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0$  (5\*)

и 
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 (5)

называют **уравнениями плоскости, проходящей через три точки**  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$  (в векторной и координатной форме соответственно).

### 3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

- а) быть параллельны,
- б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют вид:

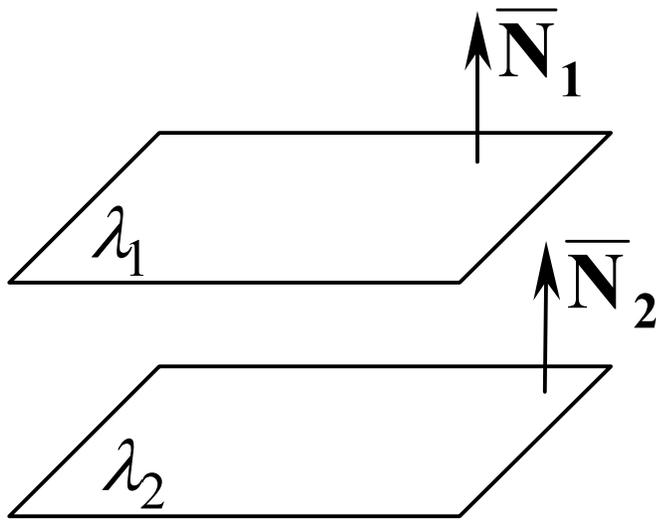
$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда:  $\bar{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$  – нормаль к  $\lambda_1$  ;

$\bar{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$  – нормаль к  $\lambda_2$ .

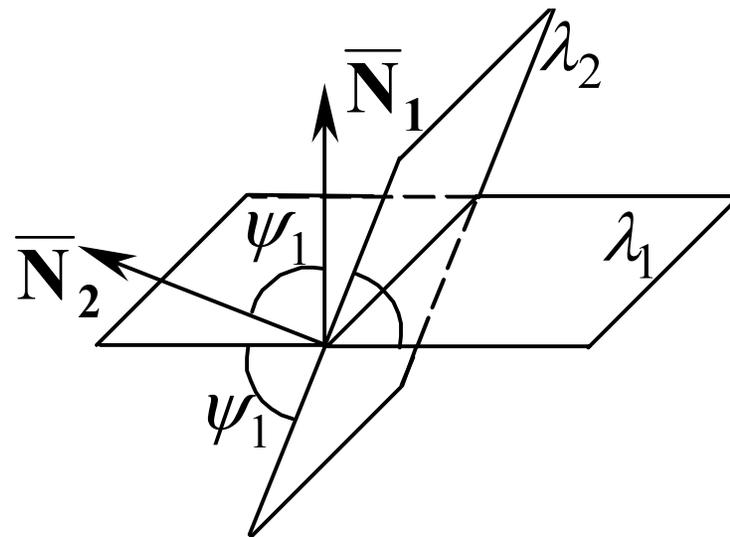
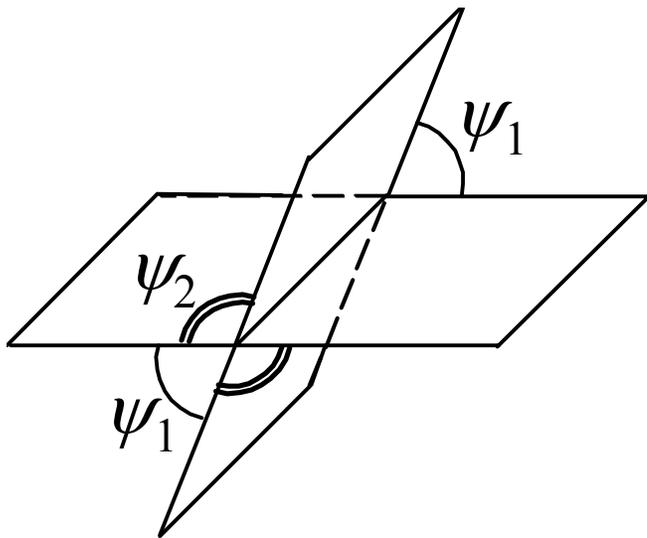
1) Пусть плоскости параллельны:



Получаем, что *плоскости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются



$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \psi_1 = \cos \psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = 0$$

***Критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями:***

$$(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

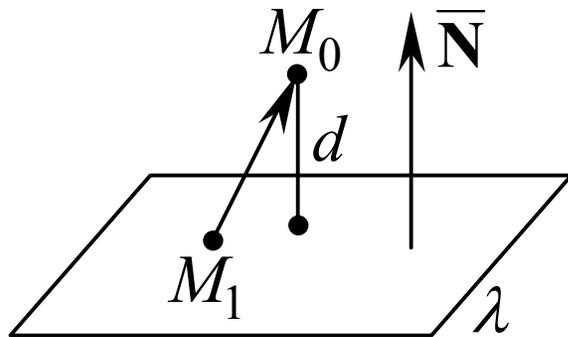
## 4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость  $\lambda$  задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  – точка, не принадлежащая плоскости  $\lambda$  .

Найти расстояние от точки  $M_0$  до плоскости  $\lambda$  .



$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1M_0})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$