Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Нелинейные операции на множестве свободных векторов*

(смешанное произведение)

Понятие евклидова пространства

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Смешанным произведением*** *трех векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на векторное произведение векторов* $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *, т.е.*

$$(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}]) .$$

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}}\,\bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) *При циклической перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *их смешанное произведение не меняется*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}) = (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}).$$

2) *При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.*

3) *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения*, т.е.

$$(\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \lambda\overline{\mathbf{c}}) = \lambda(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}).$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.*
А именно:

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}),$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2, \overline{\mathbf{c}}),$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_1 + \overline{\mathbf{c}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_2).$$

5) Критерий компланарности векторов.

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *компланарны* $\Leftrightarrow$ *их смешанное произведение равно нулю* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

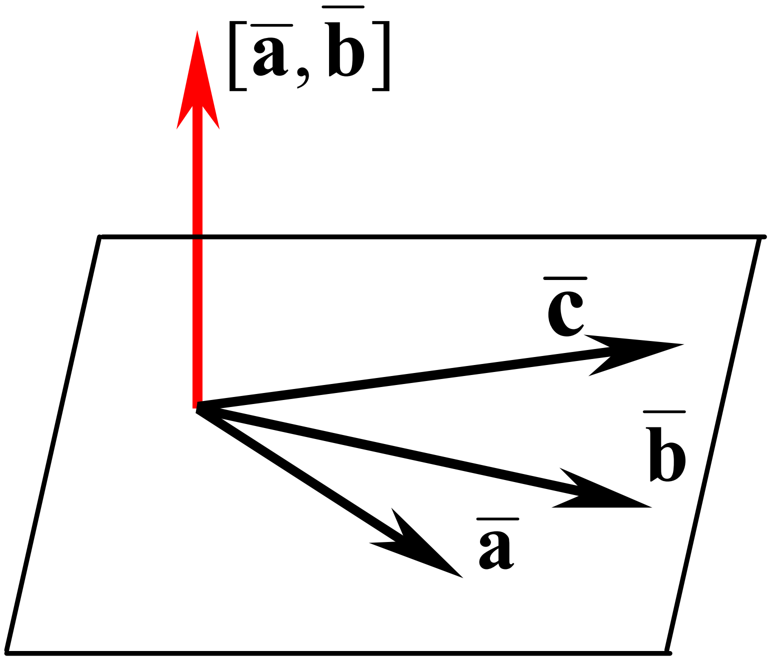

рис. 1

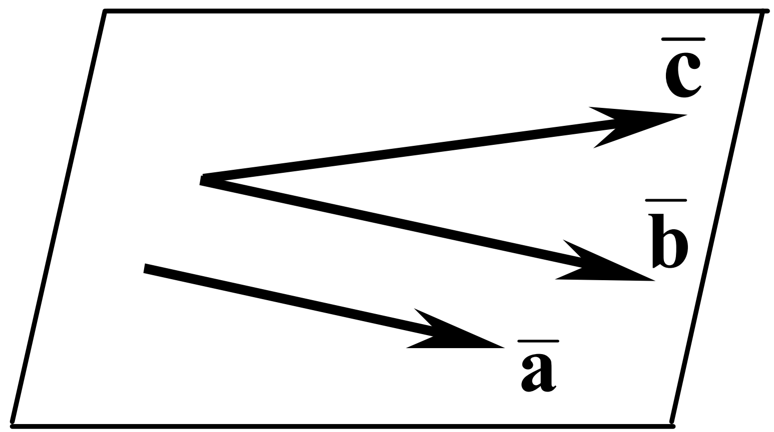

рис. 2

6) *Если* $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, *то* $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ *образуют правую тройку.*

Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, *то тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ *– левая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

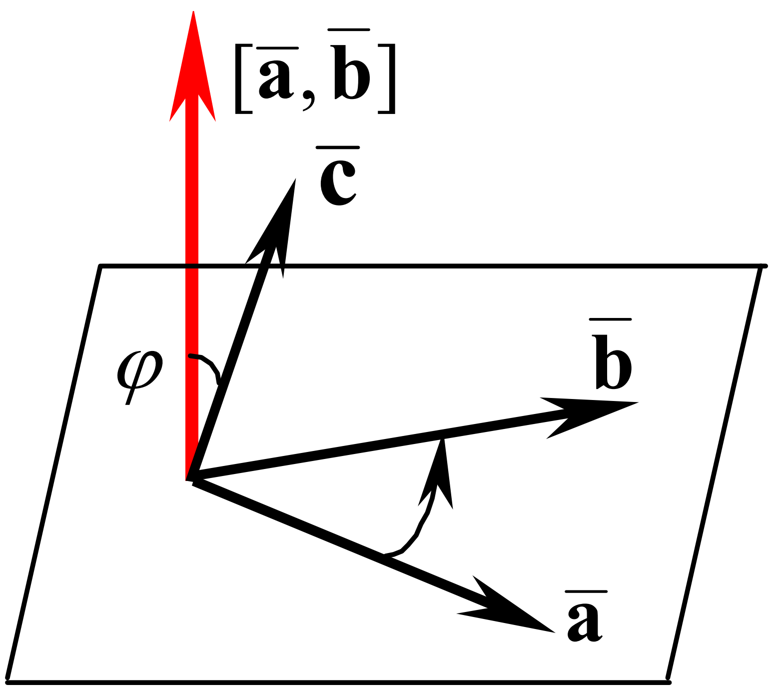

рис. 3

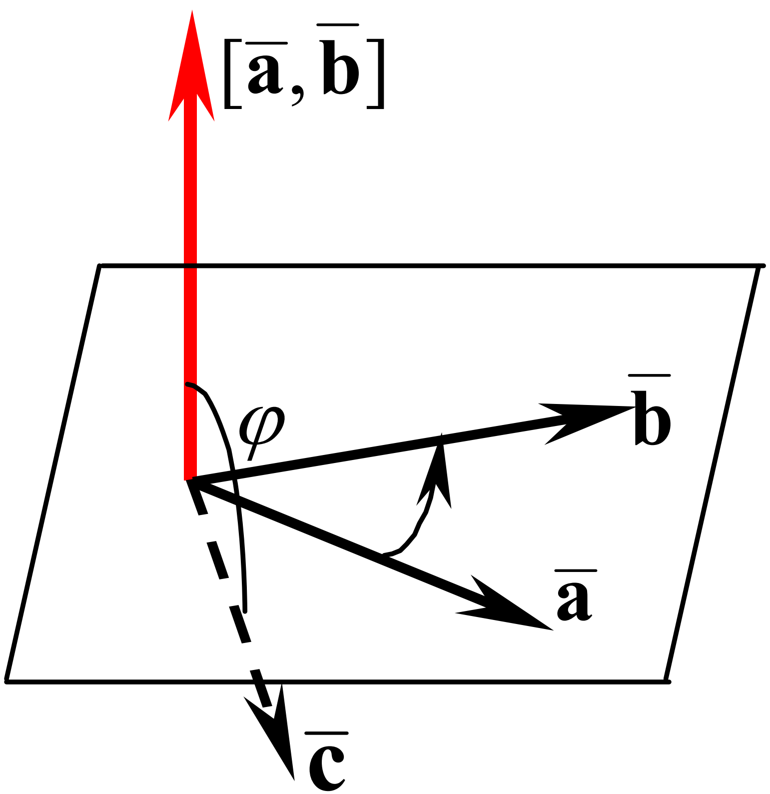

рис.4

7) Геометрический смысл смешанного произведения .

Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ *равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

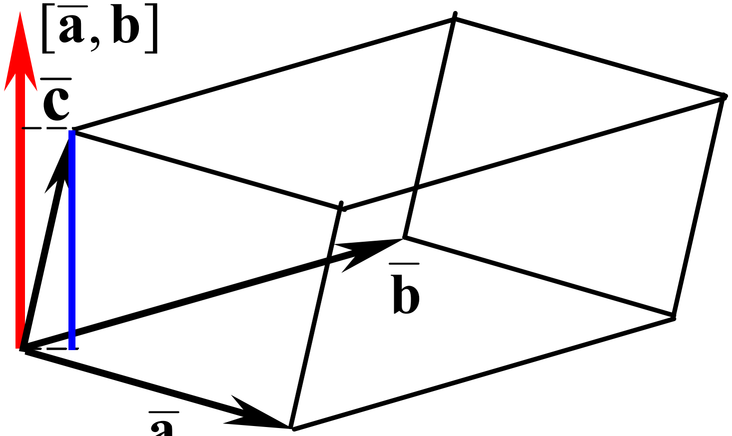

рис. 5

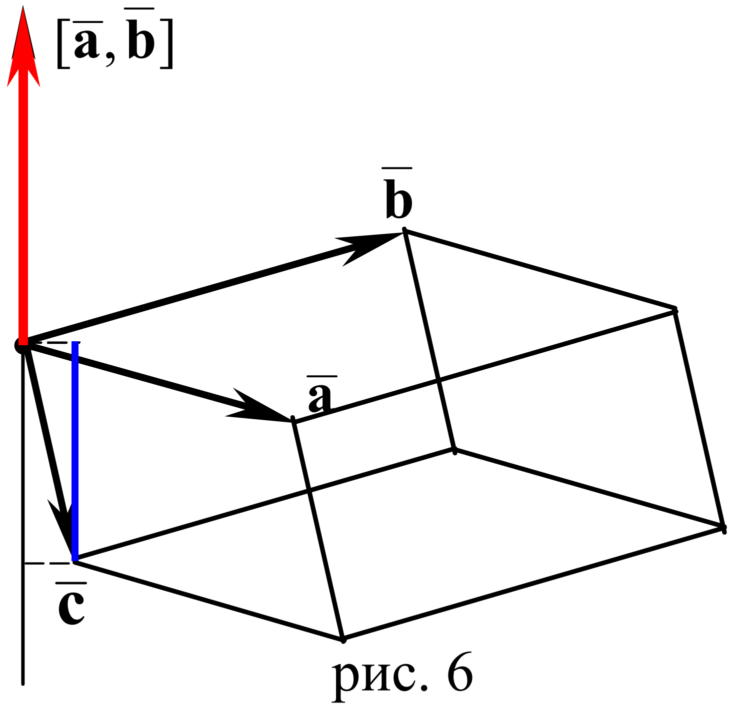

рис. 6

8) Следствие свойства 7.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, *равен* 1/6 *модуля их смешанного произведения*.

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *имеют координаты*:

$$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x\,;\,a_y\,;\,a_z\},\quad \bar{\mathbf{b}} = \{b_x\,;\,b_y\,;\,b_z\},\quad \bar{\mathbf{c}} = \{c_x\,;\,c_y\,;\,c_z\},$$

то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

§10. Евклидовы линейные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть E – линейное пространство над* $\mathbb{R}$. *Отображение* $f{:}(x,y)\to\mathbb{R}$, *которое каждой паре элементов* $x,y\in E$ *ставит в соответствие единственный и однозначно определенный элемент* $r\in\mathbb{R}$, *называется* ***скалярным произведением***, *если выполняются следующие условия*:

1) $f(x,y) = f(y,x)$;
2) $f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$;
3) $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$, $\forall\lambda \in\mathbb{R}$;
4) $f(x,x) > 0, \forall x \neq o$; $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = o$.

Обозначают: (x,y)

Линейное пространство E , на котором определено скалярное произведение векторов, называется ***евклидовым линейным пространством*** .

ТЕОРЕМА 2. *Любое конечномерное линейное пространство над* $\mathbb{R}$ *может быть превращено в евклидово пространство* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Назовем* ***длиной вектора*** $x \in E$ *число* $\sqrt{(x,x)}$

Обозначают: $|x|$.

ЛЕММА 3 (неравенство Коши – Буняковского). *Для любых* $x,y \in E$ *справедливо неравенство* $(x,y) \leq |x| \cdot |y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Углом между векторами*** $x,y \in E$ $(x \neq o$, $y \neq o)$ *назовем число* $\varphi \in [0;\pi]$, *удовлетворяющее условию*

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторы* $x,y \in E$ $(x \neq o$, $y \neq o)$ *называются* ***ортогональными***, *если* $(x,y) = 0$.

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ *называется* ***ортогональной***, *если все векторы этой системы попарно ортогональны, т.е. если* $(x_i, x_k) = 0$, $\forall i \neq k$.

Ортогональная система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ *называется* ***ортонормированной****, если длины всех векторов этой системы равны* 1 *, т.е. если*

$$(x_i, x_k) = 0\ ,\ \forall i \neq k \qquad и \qquad (x_i, x_i) = 1\ ,\ \forall i\ .$$

ЛЕММА 4. *Ортогональная система векторов линейно независима.*

ТЕОРЕМА 5. *В любом конечномерном евклидовом пространстве существуют ортогональные (ортонормированные) базисы.*

ТЕОРЕМА 6. *Базис* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *евклидова пространства* $E^{(n)}$ *является ортонормированным* $\Leftrightarrow \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$,

где $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$,

$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$.