Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Нелинейные операции на множестве свободных векторов***

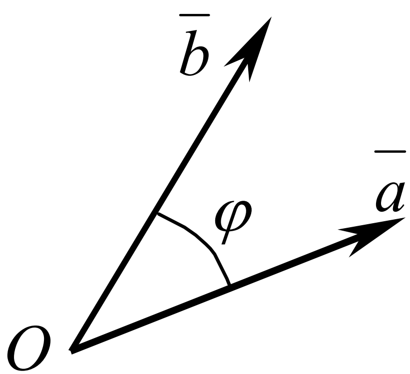
Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

1. Скалярное произведение векторов



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Скалярным произведением*** *двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число*

$$|\,\bar{\mathbf{a}}\,|\cdot|\,\bar{\mathbf{b}}\,|\cdot\cos\varphi$$

Если $\bar{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{0}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}=\bar{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})$, $<\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}>$.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

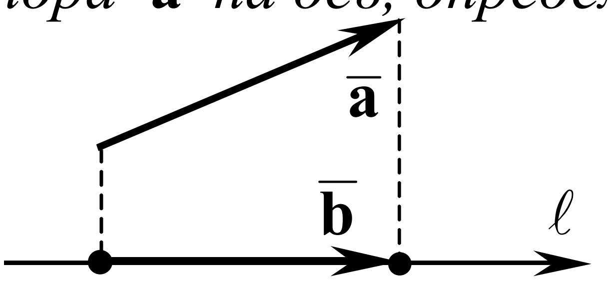
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{a}}$ (*длины вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\bar{\mathbf{a}}$ *на* $\bar{\mathbf{b}}$). Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{a}}}\overline{\mathbf{b}} = |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}}\overline{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Проекцией вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***на вектор*** $\bar{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\bar{\mathbf{b}}$.



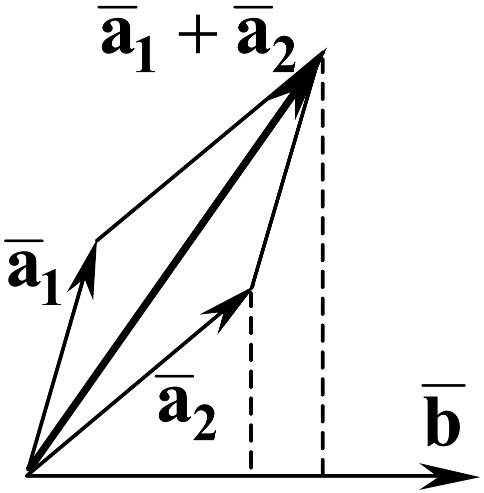
3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}) = \lambda(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы.* Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}})$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2)$$



5) *Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины.* Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) = |\,\overline{\mathbf{a}}\,|^2$$

6) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* .

(критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов***.

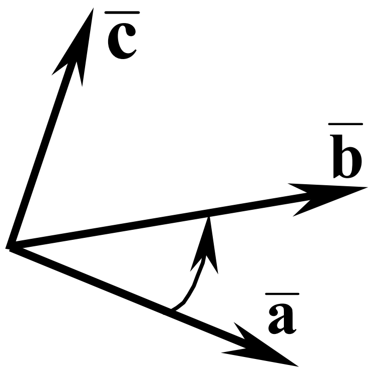
8) *Если под действием постоянной силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2 , *то работа силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *будет равна*

$$A = \left(\bar{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{M_1 M_2}}\right)$$

(физический смысл скалярного произведения).

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка некомпланарных векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется* ***правой****, если поворот от вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\bar{\mathbf{b}}$ *на меньший угол виден из конца вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *против часовой стрелки.*



В противном случае тройка векторов называется ***левой***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Векторным произведением*** *двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{c}}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *– угол между векторами* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

2) *вектор* $\bar{\mathbf{c}}$ *ортогонален векторам* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

3) *тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– правая.*

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Обозначают: $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

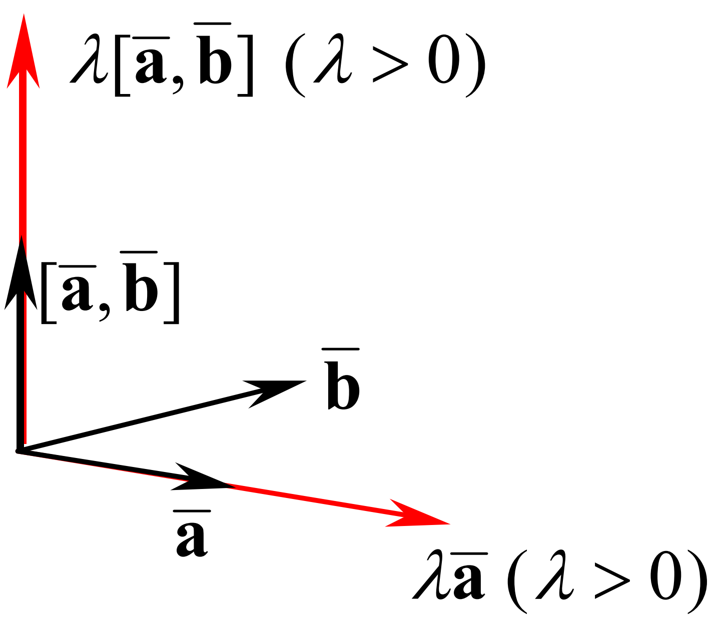
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

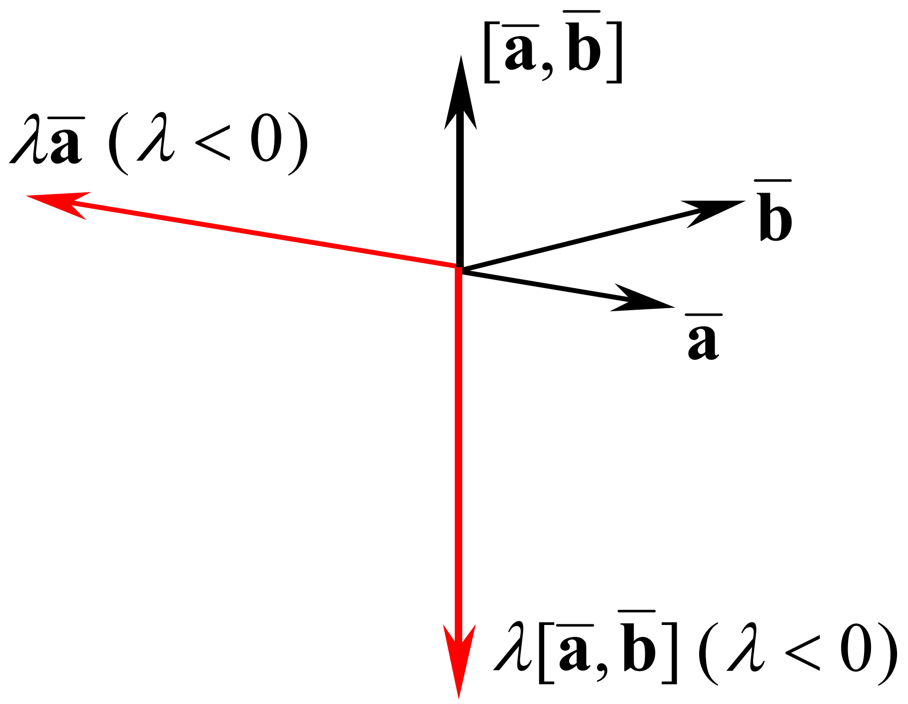
1) *При перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е.

$$[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,] = -\,[\,\bar{\mathbf{b}}\,,\bar{\mathbf{a}}\,]\,.$$

2) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения* , т.е.

$$[\,\lambda\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,] = [\,\bar{\mathbf{a}}\,,\lambda\bar{\mathbf{b}}\,] = \lambda\,[\,\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,]\,.$$





3) *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы.*
А именно: $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2] .$$

4) Критерий коллинеарности векторов .

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарные* $\Leftrightarrow$ *их векторное произведение равно нулевому вектору* .

5) Геометрический смысл векторного произведения .
Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах* .

6) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты*: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x\,;\, a_y\,;\, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x\,;\, b_y\,;\, b_z\}$, *то*

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7) Механический смысл векторного произведения.

Если вектор $\bar{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* M , *то векторное произведение*

$$\left[\overline{\mathbf{OM}}, \bar{\mathbf{F}}\right]$$

представляет собой момент силы $\bar{\mathbf{F}}$ *относительно точки* O .