Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Понятие линейного пространства***

(линейная зависимость и независимость, базис)

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

3. Понятие линейной зависимости и независимости. Базис

Пусть L – линейное пространство над $\boldsymbol{F}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *линейно зависимы, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю и такие, что линейная комбинация*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$$

равна нулевому элементу o *линейного пространства* L .

Если равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ *возможно только при условии* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, *то векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *называют линейно независимыми.*

ЛЕММА 4. *Векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

Замечание. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется базисом этого линейного пространства.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n \in L$ образуют базис в линейном пространстве L если выполняются два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;
2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора a из L.

ТЕОРЕМА 5. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют *конечномерным,* а n называют *размерностью линейного пространства* (пишут: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему векторов, то пространство называют *бесконечномерным* (пишут: $\dim L = \infty$).

ТЕОРЕМА 6 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*