Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Векторы. Линейные операции на множестве векторов Понятие линейного пространства***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

Глава II. Векторная алгебра. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется ***векторным исчислением***.

Векторное исчисление подразделяют на ***векторную алгебру*** и ***векторный анализ***.

В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное).

В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

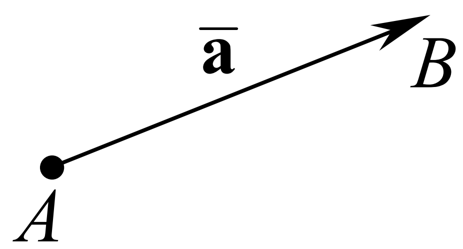
§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вектором*** *называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора. Обозначают: $|\overline{\mathbf{AB}}|$ или $|\bar{\mathbf{a}}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Обозначают: $\bar{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (***параллельными***).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$ – если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные,

$\bar{\mathbf{a}} \nparallel \bar{\mathbf{b}}$ – если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

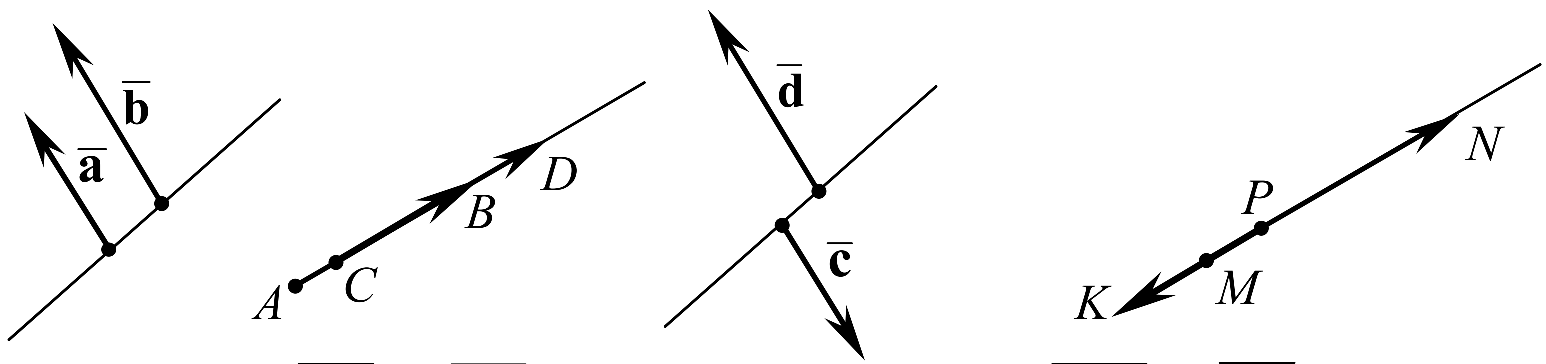
Коллинеарные векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ называются ***сонаправлен-ными*** если

- их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых)
- один из лучей [AB) или [CD) целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой).

В противном случае коллинеарные векторы называются ***противоположно направленными***.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \bar{\mathbf{b}}$ – если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

$\bar{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \bar{\mathbf{b}}$ – если $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



$\bar{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \bar{\mathbf{b}}$ $\overline{\mathbf{AB}} \uparrow\uparrow \overline{\mathbf{CD}}$ $\bar{\mathbf{c}} \uparrow\downarrow \bar{\mathbf{d}}$ $\overline{\mathbf{MN}} \uparrow\downarrow \overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными*** (***ортогональными***).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением вектора*** $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$ *, а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$ *.*

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$*, то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$ *.*

Обозначают: $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$

Частный случай: произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

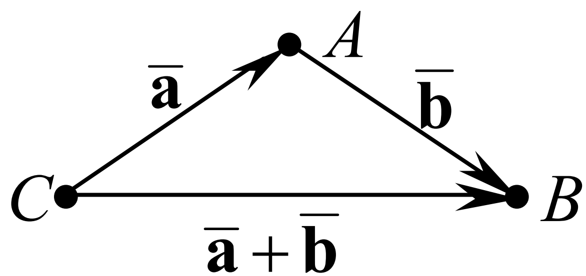
Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$ *, для некоторого числа* $\alpha \neq 0$ *.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило треугольника).

Пусть даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$.

Возьмем произвольную точку С и построим последовательно векторы $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Вектор $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.

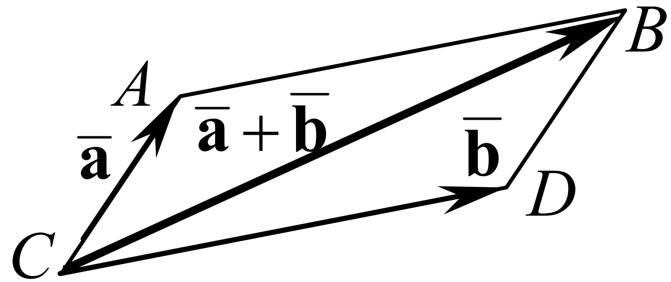


ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма).

Пусть даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$.

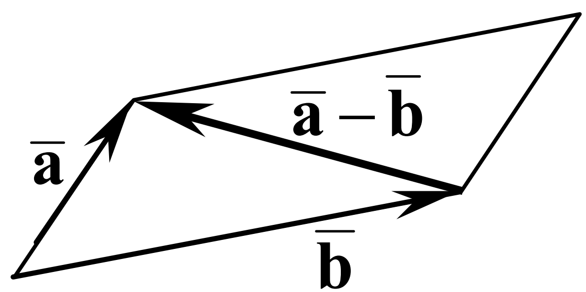
Возьмем произвольную точку C и построим векторы $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Суммой векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке C и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$

Сумму $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$ называют ***разностью векторов*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***и*** $\bar{\mathbf{b}}$ и обозначают $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.



СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);

2) $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);

3) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$;

4) $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$;

5) $\alpha \cdot (\beta\bar{\mathbf{a}}) = (\alpha \cdot \beta)\bar{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел) ;

6) $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \beta\bar{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);

7) $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);

8) $1 \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$.

Свойства линейных операций над матрицами

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

4) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

5) $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$

6) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$

7) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

8) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

Свойства линейных операций над векторами

1) $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}=\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{a}}$

2) $(\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}})+\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{a}}+(\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}})$

3) $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{0}}=\overline{\mathbf{a}}$;

4) $\overline{\mathbf{a}}+(-\overline{\mathbf{a}})=\overline{\mathbf{0}}$;

5) $\alpha(\beta\overline{\mathbf{a}})=(\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$

6) $(\alpha+\beta)\overline{\mathbf{a}}=\alpha\overline{\mathbf{a}}+\beta\overline{\mathbf{a}}$

7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}})=\alpha\overline{\mathbf{a}}+\alpha\overline{\mathbf{b}}$

8) $1\overline{\mathbf{a}}=\overline{\mathbf{a}}$.

§ 7. Понятие линейного пространства

1. Определение и примеры

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа из $\boldsymbol{F}$ (где $\boldsymbol{F}$ – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множество L называется* ***линейным пространством над $\boldsymbol{F}$*** *если для любых элементов $a,b,c\in L$ и для любых чисел $\alpha,\beta\in \boldsymbol{F}$ выполняются условия:*

1. $a+b=b+a$ (*коммутативность сложения элементов из* L);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения элементов из* L);
3. *Во множестве L существует такой элемент* о, *что $a+o=a$. Элемент o называют* ***нулевым элементом*** *множества* L;
4. *Для любого элемента $a\in L$ $\exists$ элемент $-a\in L$ такой, что $a+(-a)=o$. Элемент* –а *называют* ***противоположным к*** а;
5. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ *(ассоциативность относительно умножения чисел)*;
6. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ *(дистрибутивность умножения на элемент из* L *относительно сложения чисел)*;
7. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ *(дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из* L*)*;
8. $1a=a$.

Линейное пространство над $\mathbb{R}$ называют еще ***вещественным (действительным) линейным пространством***, а над $\mathbb{C}$ – ***комплексным***.

ПРИМЕРЫ линейных пространств:

1) $M(m \times n, \mathbb{R})$ – матрицы размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$;

2) $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости);

3) $\mathbb{R}^n$ – множество последовательностей действительных чисел.

$\mathbb{R}^n$ называют ***арифметическим линейным пространством***, элементы пространства $\mathbb{R}^n$ называют ***n-мерными векторами***

4) $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$;

5) $\mathbf{C}[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

ЛЕММА 2 (простейшие свойства элементов линейного пространства).

Пусть L *– линейное пространство над* $\boldsymbol{F}$. *Тогда для любых элементов* $a, b \in L$ *и любых чисел* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $0 \cdot a = o$, $\alpha \cdot o = o$;

2) $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -\alpha a$, $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha a$;

3) $\alpha \cdot (a - b) = \alpha a - \alpha b$, $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha a - \beta a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Наряду с термином «линейное пространство» используется также термин «***векторное пространство***», а элементы линейного пространства принято называть ***векторами***.

2. Подпространства линейных пространств

Пусть L – линейное пространство над $\boldsymbol{F}$, L_1 – непустое подмножество в L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что L_1 является* ***подпространством линейного пространства L*** *(или* ***линейным подпространством****), если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на L.*

Если L_1 является подпространством линейного пространства L, то пишут: $L_1 \leq L$

ТЕОРЕМА 3 (критерий подпространства).
Пусть L – линейное пространство над $\boldsymbol{F}$,
L_1 – непустое подмножество в L.
L_1 является подпространством линейного пространства L $\Leftrightarrow \forall a, b \in L_1$ и $\forall \alpha \in \boldsymbol{F}$ выполняются условия:

1) $a - b \in L_1$;
2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

ПРИМЕРЫ линейных подпространств:

1) $V^{(2)} \leq V^{(3)}$;

2) $\mathbb{R}^{n}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$, имеющих степень меньше n.

$$\mathbb{R}^{n}[x] \leq \mathbb{R}[x] ;$$

3) Пусть **AX=O** – СЛОУ, имеющая нетривиальные решения.
$\mathcal{H}$ – множество решений СЛОУ **AX=O** .

$$\mathcal{H} \leq \mathbb{R}^{n} ;$$

4) $O = \{o\}$ – подпространство любого линейного пространства (*тривиальное подпространство*);

5) Пусть L – линейное пространство над $\boldsymbol{F}$, $a_1, a_2, \ldots a_k \in L$.

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \mid \alpha_i \in \boldsymbol{F}\}$$

$\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots a_k)$ называют ***линейной оболочкой векторов*** $a_1, a_2, \ldots a_k$

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots a_k) \leq L$$