

СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Найти y' . Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти y'' . Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{5x^2}{x^2 - 9}$.

1) Область определения функции $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

2) Область определения функции симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2 - 9} = \frac{5x^2}{x^2 - 9} = f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси Oy .

3) Функция имеет две точки разрыва: $x = 3$ и $x = -3$. Определим тип разрывов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{5x^2}{(x-3) \cdot (x+3)} = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3-0-3) \cdot (3-0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(-0) \cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{-0} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{5x^2}{(x-3) \cdot (x+3)} = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3+0-3) \cdot (3+0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(+0) \cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{+0} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Итак, точка $x = 3$ является точкой разрыва II рода, прямая $x = 3$ – вертикальная асимптота графика функции.

Учитывая симметрию графика функции относительно оси Oy , для точки $x = -3$ получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = -\infty.$$

Следовательно, точка $x = -3$ тоже является точкой разрыва II рода, прямая $x = -3$ – вертикальная асимптота графика функции.

4) Функция определена при сколь угодно больших x . Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{(x^2 - 9)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} \right) = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2 - 9} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) = 5.$$

Следовательно, прямая $y = 0 \cdot x + 5$ (т.е. прямая $y = 5$) является наклонной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая $y = 5$ будет наклонной асимптотой и для левой части графика функции (так как график функции симметричен относительно оси Oy).

5) Найдем точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Ox :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow \frac{5x^2}{x^2 - 9} = 0, \Rightarrow 5x^2 = 0, \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Пересечение с осью Oy :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 0^2}{0^2 - 9} = 0$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат $O(0;0)$.

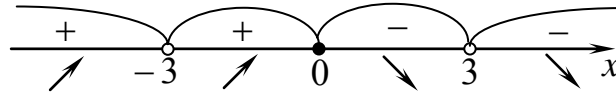
6) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\frac{5x^2}{x^2 - 9} \right)' = 5 \cdot \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{90x}{(x^2 - 9)^2},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y' = 0 \text{ при } x = 0; \quad \text{б) } y' \neq 0 \text{ при } x = \pm 3 \notin D(y).$$

Таким образом, критической точкой первого рода является только точка $x = 0$.

Критическая точка $x = 0$ и точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-3; 0)$, функция убывает на интервалах $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка максимума. Максимум функции:

$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

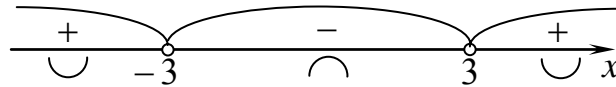
7) Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{90x}{(x^2 - 9)^2} \right)' = -90 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 - 9)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{270(x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y'' \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y); \quad \text{б) } y'' \neq 0 \text{ при } x = \pm 3 \notin D(y).$$

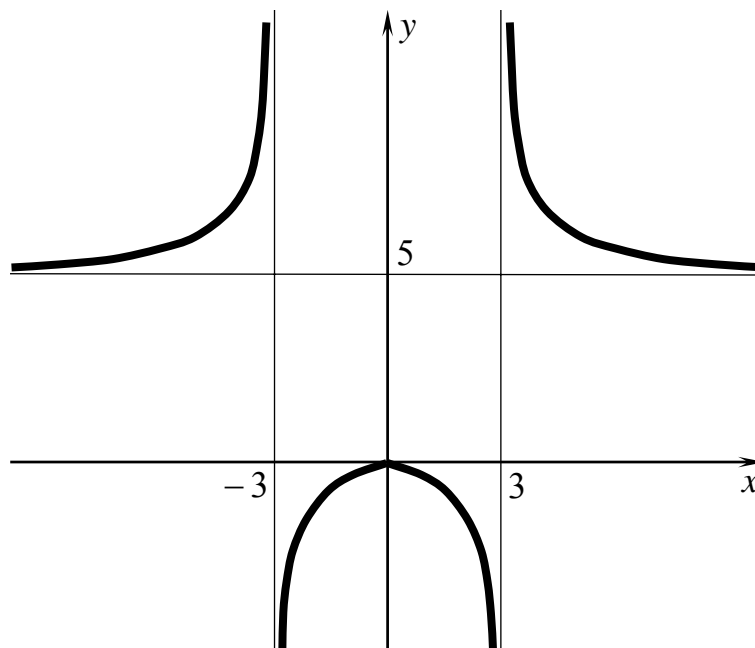
Таким образом, критических точек второго рода функция не имеет. Значит, график функции не имеет точек перегиба.

Точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(-3; 3)$, график функции вогнутый на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

8) На основании проведенного исследования строим следующий график:



ПРИМЕР 2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

1) Область определения функции $D(y) = \mathbb{R}$.

2) Область определения функции симметрична относительно начала координат, но

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - 6(-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 - 6x^2},$$
$$\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x).$$

Следовательно, функция общего вида и ее график не является симметричным относительно оси Oy или начала координат.

3) Функция не имеет точек разрыва. Следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот.

4) Функция определена при сколь угодно больших x . Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1,$$
$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - 1 \cdot x) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x^2}{3x^2}\right) = -2.$$

Следовательно, прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая $y = x - 2$ будет наклонной асимптотой и для левой части графика функции, так как при вычислении

$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x}$ и $b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 \cdot x)$ мы будем в точности повторять все действия, выполненные при вычислении k_1 и b_1 .

5) Найдем точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Ox :

$$y = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = 0, \Rightarrow x^2 \cdot (x - 6) = 0,$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ или } x = 6.$$

Пересечение с осью Oy :

$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{0^3 - 6 \cdot 0^2} = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат $O(0;0)$ и пересекает ось Ox еще и в точке $A(6;0)$.

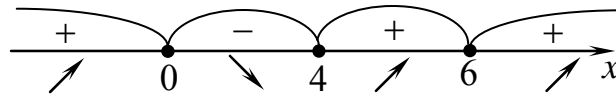
6) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 - 12x}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2}} = \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x \cdot (x - 6)^2}},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y' = 0 \text{ при } x = 4; \quad \text{б) } y' \neq 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 6.$$

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 0$, $x = 4$, $x = 6$.

Критические точки разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$, функция убывает на интервале $(0; 4)$. Точка $x = 0$ – точка максимума, точка $x = 4$ – точка минимума. Максимум функции и минимум функции:

$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad y_{\min} = y(4) = -\sqrt[3]{32} \approx -3,2.$$

7) Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

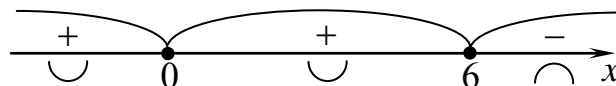
$$y'' = \left(\frac{x - 4}{\sqrt[3]{x \cdot (x - 6)^2}} \right)' = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x - 6)^2} - (x - 4) \cdot \frac{(x - 6)^2 + x \cdot 2 \cdot (x - 6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot (x - 6)^4}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot (x - 6)^4}} =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4 \cdot (x - 6)^5}},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y'' \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y); \quad \text{б) } y'' \neq 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 6.$$

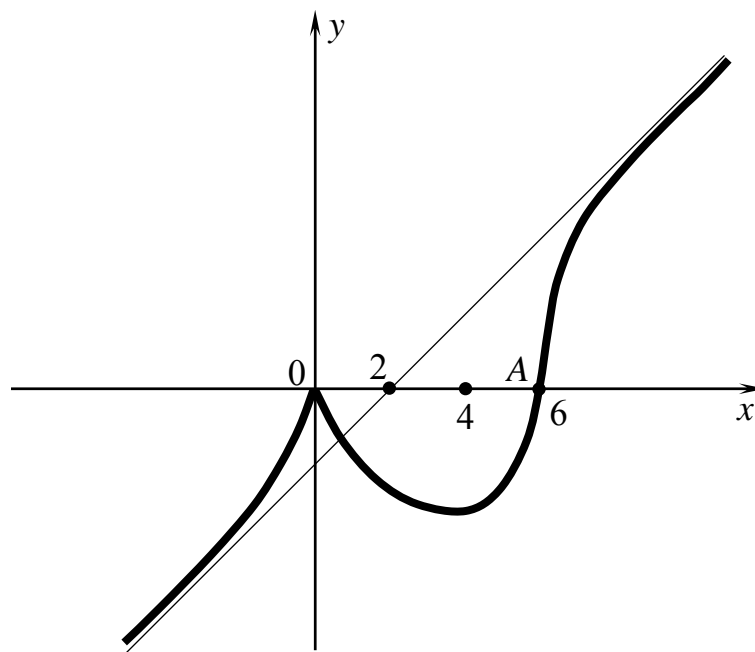
Таким образом, критическими точками второго рода являются точки $x = 0$, $x = 6$.

Критические точки разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(6; +\infty)$, график функции вогнутый на интервале $(-\infty; 6)$. Точка $A(6; 0)$ – точка перегиба графика функции.

8) На основании проведенного исследования строим следующий график:



ПРИМЕР 3. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{1}{\ln x}$.

1) Область определения функции $D(y) = (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

2) Область определения функции не симметрична относительно начала координат. Следовательно, функция общего вида и ее график не является симметричным относительно оси Oy или начала координат.

3) Функция имеет две точки разрыва: $x = 0$ и $x = 1$. Определим тип разрывов:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\ln(+0)} \right) = \left(\frac{1}{-\infty} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\ln(1-0)} \right) = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\ln(1+0)} \right) = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Итак, точка $x = 1$ является точкой разрыва II рода, прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода.

4) Функция определена при сколь угодно больших положительных x . Следовательно, возможно существование наклонной асимптоты для правой части графика. Имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0 \cdot x + 0$ (т.е. прямая $y = 0$) является наклонной асимптотой правой части графика функции.

5) График функции не пересекает оси координат, так как $\frac{1}{\ln x} \neq 0$ (\Rightarrow не пересечения с осью Ox) и $0 \notin D(y)$ (\Rightarrow нет пересечения с осью Oy).

6) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

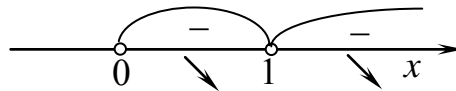
$$y' = \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = - \frac{1}{x \cdot \ln^2 x},$$

\Rightarrow а) $y' \neq 0$ при $\forall x \in D(y)$;

б) $y' \nexists$ при $x = 0 \notin D(y)$ и при $x = 1 \notin D(y)$.

Таким образом, критических точек первого рода функция не имеет. Значит, функции не имеет экстремумов.

Точка разрыва $x = 1$ разбивают область определения функции на две части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервалах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$.

7) Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

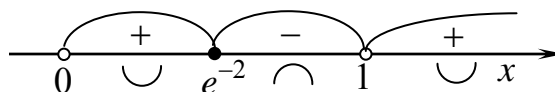
$$y'' = \left(- \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \right)' = \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \cdot \ln^4 x} = \frac{2 + \ln x}{x^2 \cdot \ln^3 x},$$

\Rightarrow а) $y'' = 0$ при $x = e^{-2} \approx 0,1$;

б) $y'' \nexists$ при $x = 0 \notin D(y)$ и при $x = 1 \notin D(y)$.

Таким образом, критической точкой второго рода является точка $x = e^{-2}$.

Критическая точка $x = e^{-2}$ и точка разрыва $x = 1$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(e^{-2}; 1)$, график функции вогнутый на интервалах $(0; e^{-2})$ и $(1; +\infty)$. Точка $A(e^{-2}; -0,5)$ – точка перегиба.

8) На основании проведенного исследования строим следующий график:

