Математический анализ
Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: ***Экстремумы функции. Выпуклость и вогнутость кривой. Асимптоты кривой***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

2. Экстремумы функции (самостоятельно)

Пусть $x_0 \in D(f)$, x_0 – внутренняя точка $D(f)$ (т.е. существует некоторая окрестность точки x_0, целиком лежащая во множестве $D(f)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка x_0 называется* ***точкой максимума функции $f(x)$*** *если существует такая δ-окрестность $U(x_0,\delta)$ точки x_0, что* $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$.

Значение функции точке максимума называется ***максимумом функции***.

Точка x_0 называется ***точкой минимума функции $f(x)$*** *если существует такая δ-окрестность $U(x_0,\delta)$ точки x_0, что*

$$f(x) > f(x_0)\ ,\ \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Значение функции точке минимума называется ***минимумом функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

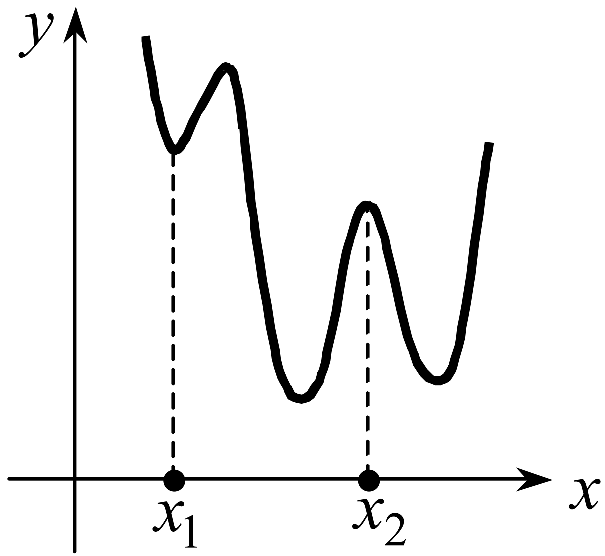
Замечания:

1) Понятия минимум и максимум функции близки к понятиям наименьшее и наибольшее значения функции. Они показывают, в каком отношении находятся значение функции в точке x_0 и в других точках.

   Различие – в области действия понятий. Наибольшее и наименьшее значения – понятия глобального характера, максимум и минимум – понятия локального характера.

   Поэтому в некоторой литературе употребляют термины «***глобальный максимум*** (***минимум***)» вместо наибольшего (наименьшего) значения функции и «***локальный максимум*** (***минимум***)» – вместо максимум (минимум) функции.

2) Функция может иметь в своей области определения несколько точек максимума и минимума. Причем, некоторые минимумы функции могут быть больше ее максимумов.

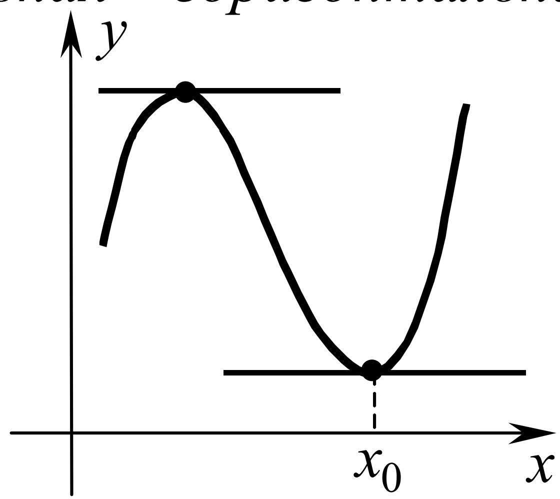


ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие экстремума, теорема Ферма).

Пусть x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *– дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ 2.

Если x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и кривая* $y = f(x)$ *имеет невертикальную касательную в точке* $M_0(x_0\ ,f(x_0))$, *то эта касательная – горизонтальная.*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

(Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 148.)

Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются ***стационарными точками функции*** $f(x)$.

ТЕОРЕМА 3 (первое достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* D(f) ,

$f(x)$ *непрерывна в* $U(x_0,\delta)$

$f(x)$ *дифференцируема в* $U(x_0,\delta)$ *или* $U^*(x_0,\delta)$.

Если при переходе через точку x_0 *производная функции* $f(x)$ *меняет знак, то* x_0 *является точкой экстремума.*

При этом, если производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 *– точка максимума, если с минуса на плюс – то* x_0 *– точка минимума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

(Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 150-151.)

Замечание.

Из теоремы $3 \Rightarrow$ точками экстремума могут быть не только стационарные точки, но и точки, в которых функция не имеет производной (точки разрыва производной).

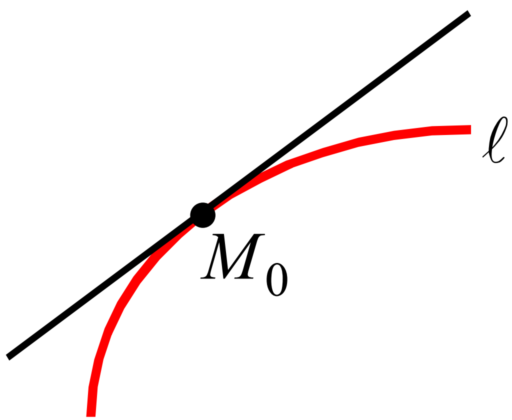
Стационарные точки функции $f(x)$ и точки, в которых $f\,'(x)$ не существует, называются ***критическими точками*** I ***рода*** (***критическими точками по первой производной***).

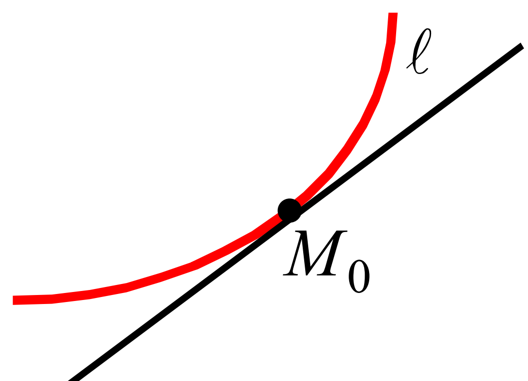
3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть ℓ – кривая, M_0 – точка кривой, причем в M_0 существует невертикальная касательная к ℓ.*

Кривую ℓ называют ***выпуклой в точке M_0***, *если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к ℓ в точке M_0.*

Кривую ℓ называют ***вогнутой в точке M_0***, *если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к ℓ в точке M_0.*

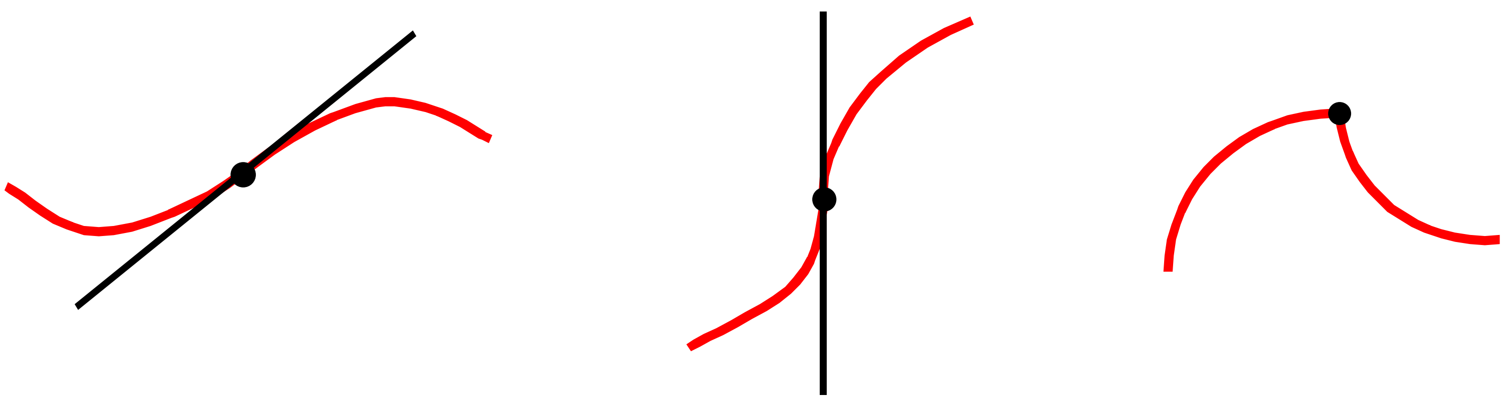




Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются ***точками перегиба*** *кривой.*

Замечания.

1) Выпуклость и вогнутость кривой в точке – локальные понятия. Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания. В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.
2) В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кривая* $y = f(x)$ *называется* ***выпуклой*** (*вогнутой*) ***на интервале*** $(a;b)$ *если* $\forall x \in (a;b)$ *кривая выпукла* (*вогнута*) *в соответствующей точке* $M(x\,;f(x))$.

Замечания.

1) Если $M_0(x_0\,;f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$.
2) Точками перегиба кривой $y = f(x)$ часто называют точки, которые разделяют интервалы выпуклости и вогнутости этой кривой (т.е. абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$).

ТЕОРЕМА 5 (необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*:

1) *если кривая* $y = f(x)$ *выпукла* (*вогнута*) *на интервале* $(a;b)$, *то* $f''(x) \le 0 \quad (f''(x) \ge 0), \quad \forall x \in (a;b)$
(необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика);

2) *если* $f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0) \quad \forall x \in (a;b)$, *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла* (*вогнута*) *на интервале* $(a;b)$
(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика).

СЛЕДСТВИЕ 6 (необходимое условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ (*или в* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$).

Если $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *– точка перегиба кривой* $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ *или в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *не имеет второй производной*.

Замечание. Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль или имеет разрыв, называют иногда критическими точками II рода функции $y = f(x)$ (или критическими точками функции $y = f(x)$ по второй производной).

ТЕОРЕМА 7 (достаточное условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* D(f) *и функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в* U*(x_0,δ).

Если при переходе через точку x_0 *функция* $f''(x)$ *меняет знак*, *то точка* $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *является точкой перегиба кривой* $y = f(x)$.

4. Асимптоты кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямая* ℓ *называется* ***асимптотой*** *кривой, если при неограниченном удалении точки* M *кривой от начала координат расстояние от точки* M *до прямой* ℓ *стремится к нулю*.

Замечание.

Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ не пересекает (почему?), наклонные – может пересекать.

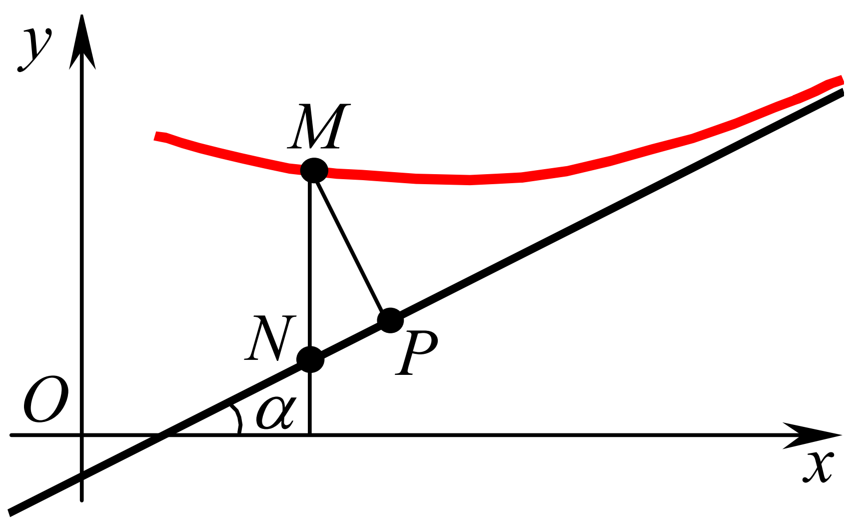
ТЕОРЕМА 8 (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой кривой* $y = f(x) \Leftrightarrow$ *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{è} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

$$\text{(или} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{è} \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b \quad \text{).}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Замечания.

1) Из теоремы 8 следует, что график функции $y = f(x)$ может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности $+\infty$ или $-\infty$.

   Причем, наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при $x \to +\infty$) и для левой ветви (т.е. при $x \to -\infty$).

2) Если $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ è $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} f(x) = b$,

   то наклонная асимптота имеет уравнение $y = b$, т.е. является горизонтальной.

ТЕОРЕМА 9 (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $x = a$ *является вертикальной асимптотой кривой* $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ *точка* $x = a$ *является точкой разрыва* II *рода функции* $y = f(x)$, *причем, хотя бы один из односторонних пределов* $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ *равен бесконечности*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

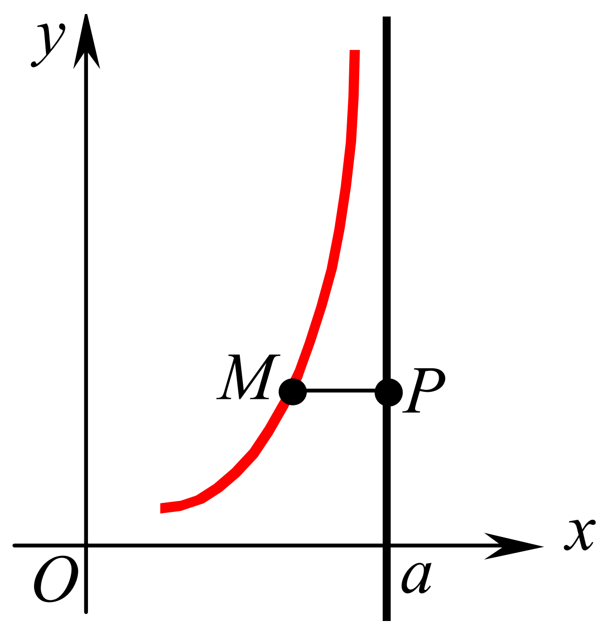


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Найти $f'(x)$. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти $f''(x)$. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.