Математический анализ
Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: ***Дифференциал функции. Производные и дифференциалы порядка n. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

§6. Дифференциал функции

1. Определение и геометрический смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ *, если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно* Δx *части и бесконечно малой более высокого порядка чем* Δx , т.е.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x)\ , \qquad (1)$$

где A – *число*, $\beta(\Delta x)$ – *б.м. более высокого порядка че*м Δx.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ *в выражении* (1) (т.е. линейную относительно Δx часть $\Delta f(x_0)$) *называют* ***дифференциалом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ и обозначают: $dy(x_0)$, $df(x_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 $\Leftrightarrow$ *она имеет в точке* x_0 *производную. При этом для ее дифференциала в точке* x_0 *справедливо равенство*

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \,. \tag{2}$$

Очевидно, что соответствие $(x_0\,; \Delta x) \to df(x_0)$ является функцией (двух переменных).

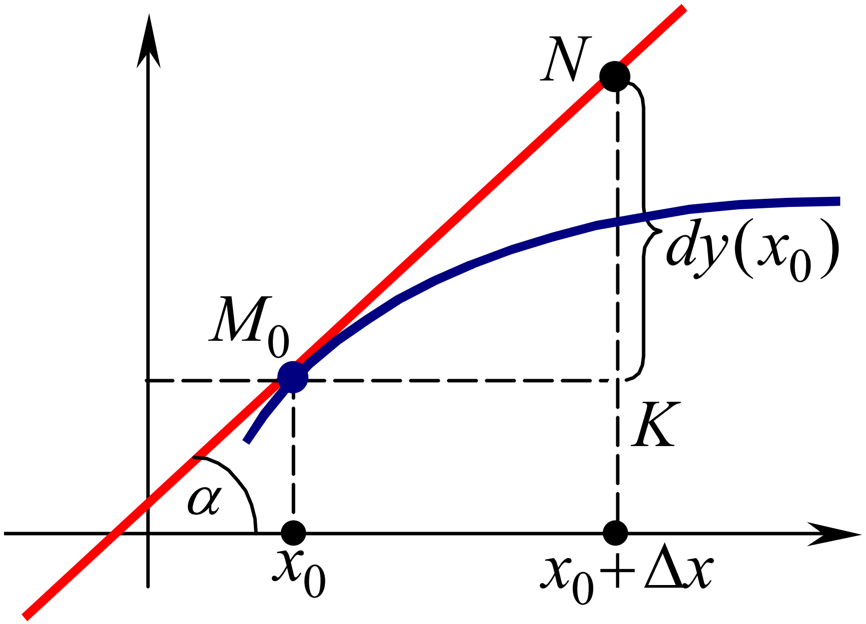
Ее называют ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ и обозначают

$$dy \,,\ df(x) \,.$$

Замечание. Из теоремы 1 следует, что нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют ***дифференцированием функции***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Тогда в x_0 функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$.
$\Rightarrow$ в точке $M_0(x_0\,;f(x_0))$ $\exists$ касательная к кривой $y = f(x)$.



Таким образом, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты точки на касательной к кривой* $y = f(x)$, *которое соответствует приращению* Δx.

Замечания.

1) Так как для дифференциала функции $y = x$ справедливо

$$dy = dx = \Delta x \ ,$$

то говорят: «*дифференциал независимой переменной равен ее приращению*».

Учитывая этот факт, формулу (2) можно переписать в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx \ . \qquad (3)$$

2) Из формулы (3) получаем, что производная $y' = f'(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, символическая дробь $\dfrac{dy}{dx}$ превратилась в реальную дробь.

§7. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$. Тогда на X_1 определена $f'(x)$.

Функцию $f'(x)$ называют также ***первой производной функции f(x)*** (или ***производной первого порядка функции f(x)***).

Если $f'(x)$ дифференцируема на некотором множестве $X_2 \subseteq X_1$, то $(f'(x))'$ называют ***второй производной функции $y = f(x)$*** (или ***производной второго порядка функции f(x)***) и обозначают

$$y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x), \quad \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Замечание. Значение второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают

$$y''(x_0), \quad \frac{d^2y(x_0)}{dx^2}, \qquad f''(x_0), \quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}.$$

Если $f''(x)$ тоже дифференцируема на некотором множестве $X_3 \subseteq X_2$, то ее производную $(f''(x))'$ называют ***третьей производной функции $y = f(x)$*** (или ***производной третьего порядка функции $f(x)$***).

Продолжая этот процесс, назовем ***n-й производной функции*** $y = f(x)$ ее производную от производной порядка $n - 1$.

Обозначают:

$$y''', \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad \frac{d^3f}{dx^3} \quad \text{– третья производная } y = f(x);$$

$$y^{(4)}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4f}{dx^4} \quad \text{– четвертая производная } y = f(x);$$

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^nf}{dx^n} \quad \text{– } n\text{-я производная } y = f(x).$$

Производные порядка $n > 1$ называют ***производными высших порядков***.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ второй производной.

Если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t,
то $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0,
$S''(t_0)$ – *ускорение в момент времени* t_0 (скорость изменения скорости)

Справедливы следующие утверждения.

1) $(C \cdot u)^{(n)} = \mathrm{C} \cdot u^{(n)}$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак n-й производной».

2) *Производная n-го порядка суммы (разности) функций равна сумме (разности) n-х производных слагаемых*, т.е.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} .$$

3) *n-я производная произведения находится по формуле*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \qquad (1)$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Формула (1) называется ***формулой Лейбница***.

2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.
Дифференциал $dy = f'(x) \cdot dx$ – функция двух переменных x и $dx = \Delta x$.
Зафиксируем значение dx.
Тогда dy станет функцией одной переменной x.

Дифференциал функции $dy(x)$ (если он существует) называется ***дифференциалом второго порядка функции*** $y = f(x)$ (или ***вторым дифференциалом функции*** $y = f(x)$) и обозначается d^2y, $d^2f(x)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$*** как дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: $d^n y$, $d^n f(x)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференциала n-го порядка и n-й производной).

Функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 $\Leftrightarrow$ она имеет в точке x_0 производную порядка n. При этом для $d^n y(x_0)$ справедливо равенство

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n \,. \qquad (2)$$

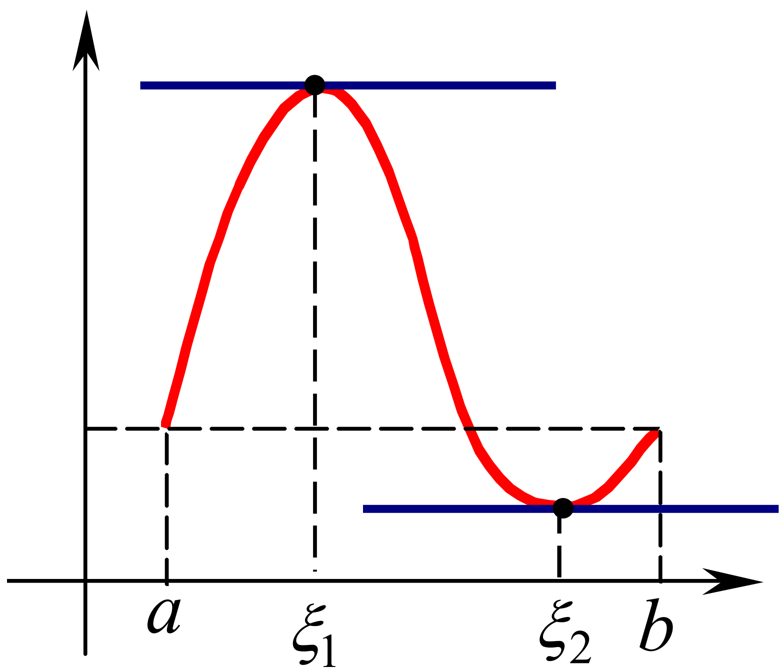
§8. Основные теоремы дифференциального исчисления

ТЕОРЕМА 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Если $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a;\ b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

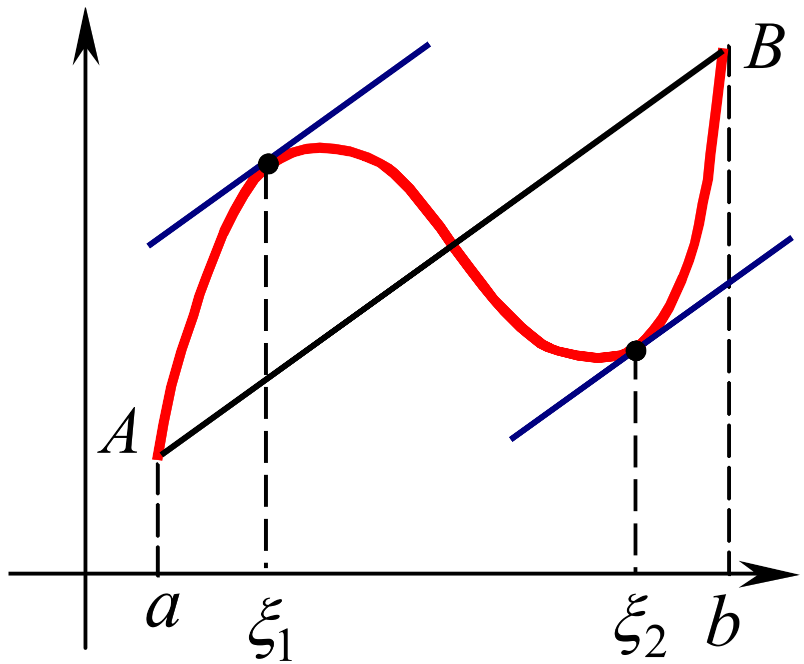
ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a;\ b]$ *и дифференцируема на* $(a;\ b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа.



Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме 2 условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей AB*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)\ . \qquad (3)$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Функция $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *постоянное значение* C $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a; b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;\ b]$ *и дифференцируемы на* $(a;\ b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a;\ b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§9. Использование производной при вычислении пределов

ТЕОРЕМА 1 (Правило Лопиталя).

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и выполняются следующие условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой δ-окрестности x_0, за исключением возможно самой x_0;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ $\left(\text{или} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = \infty\right)$;

3) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U^*(x_0,\delta)$, причем

$$\varphi'(x) \neq 0\ , \ \ \forall x \in U^*(x_0,\delta)\ .$$

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный),

то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти два предела будут равны. Т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Замечания.

1) Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ тоже являются б.м. (б.б.) при $x \to x_0$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. При этом $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать.

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$