

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Непрерывность функции*

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

§4. Непрерывность функции

1. Основные определения

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** если справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Замечания.

1) В силу теоремы 5 §3 равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (2)$$

Условие (2) – определение непрерывности функции в точке на языке односторонних пределов.

2) Равенство (1) можно также записать в виде:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

Говорят: «если функция непрерывна в точке x_0 , то знак предела и функцию можно поменять местами».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке ε - δ).

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

если $x \in U(x_0, \delta)$ (т.е. $|x - x_0| < \delta$),

то $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

Пусть $x, x_0 \in D(f)$ (x_0 – фиксированная, x – произвольная)

Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ – **приращение аргумента**

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – **приращение функции в точке x_0**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (геометрическое).

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0 ; x_0 + \delta)$ (на промежутке $(x_0 - \delta ; x_0]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 справа (слева)**, если справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Очевидно, что $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале $(a; b)$** если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке $[a; b]$** если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева).

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $X = \{x_0\}$ или $X = (a; b)$ или $X = [a; b]$.

- 1) Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X .
- 2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X и $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$, то частное $f(x)/g(x)$ – непрерывная на множестве X функция.
- 3) Пусть $f: X \rightarrow Y$, $\varphi: Y \rightarrow Z$. Если $f(x)$ непрерывна на X , $\varphi(x)$ – непрерывна на Y , то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна на X .

Свойства 1, 2, 3, следуют из свойств пределов функций.

4) *Основные элементарные функции непрерывны всюду в своей области определения.*

Если функция непрерывна всюду в области определения, то ее называют ***непрерывной***.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите по определению, что функции $\sin x$ и e^x непрерывны.

Подсказка. Используйте определение непрерывности на языке ε - δ или геометрическое.

5) *Элементарные функции непрерывны*

(следствие свойств 1– 4)

2. Точки разрыва и их классификация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в этой точке, то $f(x)$ называют разрывной в точке x_0 , а саму точку x_0 называют точкой разрыва функции $f(x)$.

Замечания.

- 1) $f(x)$ может быть определена в неполной окрестности точки x_0 . Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции.
- 2) Из определения \Rightarrow точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ в двух случаях:
 - а) $U(x_0, \delta) \in D(f)$, но для $f(x)$ не выполняется равенство
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$
 - б) $U^*(x_0, \delta) \in D(f)$.Для элементарных функций возможен только случай б).

Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка x_0 называется **точкой разрыва I рода** если функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные пределы слева и справа.

Если при этом эти пределы равны, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**, в противном случае – **точкой скачка**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка x_0 называется **точкой разрыва II рода** если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в этой точке равен ∞ или не существует.

3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

ТЕОРЕМА 1 (Вейерштрасса).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда

1) $f(x)$ – ограничена на $[a; b]$;

2) $f(x)$ принимает на $[a; b]$ свое наибольшее и наименьшее значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

*Значение функции $m = f(x_1)$ называется **наименьшим**, если $m \leq f(x), \forall x \in D(f)$.*

*Значение функции $M = f(x_2)$ называется **наибольшим**, если $M \geq f(x), \forall x \in D(f)$.*

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

ТЕОРЕМА 2 (Коши, о промежуточных значениях).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и γ – число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Коши).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то на $(a; b)$ существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорем Коши и Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то множеством ее значений является отрезок $[m; M]$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.