

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Предел функции*

(свойства пределов, бесконечно большие и их свойства, односторонние пределы, замечательные пределы, сравнение бесконечно малых и бесконечно больших)

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

3. Бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (на языке ε - δ).

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$** (в точке x_0), если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $x \in U^*(x_0, \delta)$, то $|f(x)| > M$.

Замечание. Условие $|f(x)| > M$ означает, что $f(x) \in U(\infty, 1/M)$.

\Rightarrow Записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $f(x) \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к ∞ при $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен ∞ ».

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке последовательностей).

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$** , если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к ∞ .

ТЕОРЕМА 4. Определение бесконечно большой функции на языке ε - δ и на языке последовательностей – эквивалентны.

4. Односторонние пределы.

Условие существования $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 слева** (в точке x_0 слева), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что если x удовлетворяет условию

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то

$$f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

2) Число $B \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 справа**, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что если x удовлетворяет условию

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

то

$$f(x) \in U(B, \varepsilon).$$

3) Говорят, что **предел функции $f(x)$ в точке x_0 слева равен $+\infty$ ($-\infty$)** (функция стремится к $+\infty$ ($-\infty$) при x , стремящемся к x_0 слева), если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что если x удовлетворяет условию

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то

$$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

4) Говорят, что **предел функции $f(x)$ в точке x_0 справа равен $+\infty$ ($-\infty$)**, если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что, если x удовлетворяет условию

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

то

$$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

Обозначают:

$f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ – предел $f(x)$ в точке x_0 слева,

$f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ – предел $f(x)$ в точке x_0 справа.

Если $x_0 = 0$, то пределы слева и справа обозначают:

$$f(-0), \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) \quad \text{è} \quad f(+0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 5 (необходимое и достаточное условие существования предела $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$).

Функция $f(x)$ имеет предел (конечный) при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow$ существуют конечные и равные между собой односторонние пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. При этом

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

Замечания.

- 1) Определение одностороннего предела дано на языке ε - δ .
Определение одностороннего предела на языке последовательностей дается так же как и предела при $x \rightarrow x_0$ с той лишь разницей, что рассматриваются только $\{x_n\} \rightarrow x_0$, $x_n < x_0$ в случае левого предела и $\{x_n\} \rightarrow x_0$, $x_n > x_0$ в случае правого предела.
- 2) Все свойства пределов и бесконечно больших остаются справедливыми и для односторонних пределов.

5. Замечательные пределы

Название *замечательных пределов* в математическом анализе получили следующие два утверждения:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{— первый замечательный предел;}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{— второй замечательный предел.}$$

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА
(доказать самостоятельно)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА (доказать самостоятельно)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x/\ln a} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$$

Замечание. Из формулы замены переменной \Rightarrow 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

6. Сравнение б.м. и б.б. функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \rightarrow x_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка чем $\beta(x)$** если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Записывают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

Записывают: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

3) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Записывают: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) $\alpha(x)$ **называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$** , если бесконечно малые $\alpha(x)$ и $(\beta(x))^k$ имеют один порядок, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 6 (о замене бесконечно малых на эквивалентные).

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ – б.м. при $x \rightarrow x_0$. Если

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

ТЕОРЕМА 7 (о главной части бесконечно малой).

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \rightarrow x_0$, причем $\beta(x)$ – б.м. более высокого порядка чем $\alpha(x)$. Тогда

$$\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x).$$

Б.м. $\alpha(x)$ называют в этом случае **главной частью бесконечно малой $\gamma(x)$** .

Замечание. Из 1-го и 2-го замечательных пределов и их следствий \Rightarrow если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$$

(таблица эквивалентных бесконечно малых)

Аналогично бесконечно малым сравниваются и бесконечно большие функции.

А именно, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \rightarrow x_0$, то

1) $f(x)$ называется **бесконечно большой более высокого порядка чем $g(x)$** если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2) $f(x)$ и $g(x)$ называются **бесконечно большими одного порядка**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \text{ где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0;$$

3) $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными бесконечно большими** (записывают: $f(x) \sim g(x)$), если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4) $f(x)$ называется **бесконечно малой порядка k относительно бесконечно большой $g(x)$** , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C, \text{ где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 8 (о замене бесконечно больших на эквивалентные).

Пусть $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$. Если

$$f(x) \sim f_1(x), \quad g(x) \sim g_1(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

ТЕОРЕМА 9 (о главной части бесконечно большой).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. при $x \rightarrow x_0$, причем $g(x)$ – бесконечно большая более высокого порядка чем $f(x)$. Тогда

$$z(x) = f(x) + g(x) \sim g(x).$$

Б.б. $g(x)$ называют в этом случае **главной частью бесконечно большой $z(x)$** .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно