

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Бесконечно большие последовательности*

Предел функции

(определение и свойства бесконечно больших,
предел функции и его свойства)

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

3. Бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n| > M, \quad \forall n > N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество \mathbb{R} .

I способ. Дополним множество \mathbb{R} элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

II способ. Дополним множество \mathbb{R} элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

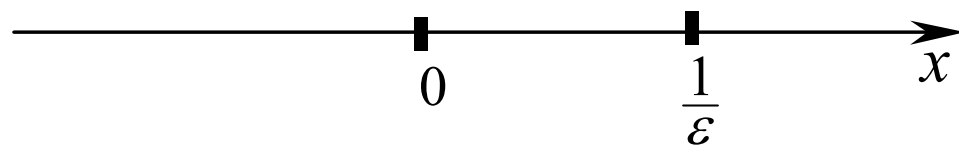
Множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют **расширенным множеством действительных чисел** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\bar{\mathbb{R}}$.

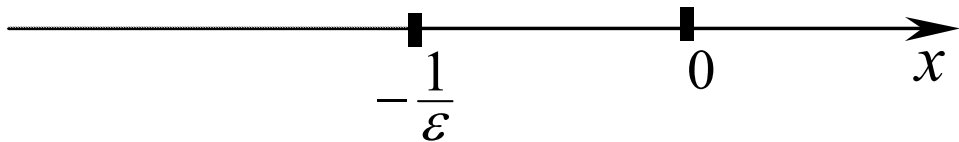
Элементы $-\infty$, $+\infty$, ∞ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε -окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, ∞ считают следующие множества:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon\}$$



$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon\}$$



$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon\}$$



Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε -окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad x_n \rightarrow \infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к ∞ ».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0, \quad \forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M, \quad \forall n > N$

\Rightarrow все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε -окрестности точки $+\infty$.

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad x_n \rightarrow +\infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к $+\infty$ ».

2) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0, \forall n$.

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, x_n \rightarrow -\infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к $-\infty$ ».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если $\{x_n\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_n\}$ – б.м.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_n\}$ – б.б.

(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

2) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. того же знака.

- 3) Если $\{x_n\}$ – б.б., а $\{y_n\}$ – ограничена, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. последовательность.
- 4) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.
- 5) Если $\{x_n\}$ – б.б., $\{y_n\}$ – сходящаяся, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \neq 0$ то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \neq 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{x_n\}$ называют **отделимой от нуля**, если существуют число $K > 0$ и номер N такие, что $|x_n| > K, \forall n > N$.

- 6) Если $\{x_n\}$ – ограниченная и отделимая от нуля, $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

7) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \quad (|x_n| \leq |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

8) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

(лемма о двух милиционерах для б.б. последовательностей)

§3. Предел функции

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – **проколота окрестность точки** x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε - δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что
если $x \in U^*(x_0, \delta)$, то $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

Замечание.

1) Условие $x \in U^*(x_0, \delta)$ означает, что для x выполняется неравенство:

- а) $0 < |x - x_0| < \delta$, если $x_0 \in \mathbb{R}$;
- б) $|x| > 1/\delta$, если $x_0 = \infty$;
- в) $x > 1/\delta$, если $x_0 = +\infty$;
- г) $x < -1/\delta$, если $x_0 = -\infty$.

2) Условие $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(x)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0** , если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Обозначают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A, \text{ при } x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0 » .

2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

- 1) Если функция имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то он единственный.
- 2) Если $f(x) \rightarrow A$, то $|f(x)| \rightarrow |A|$.
- 3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: функция локально ограничена)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \rightarrow x_0$.

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

Следствие свойства 6. Если $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то

$\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

Замечание. Свойство 6 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \rightarrow x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \rightarrow x_0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

10) Пусть $f: X \rightarrow Y$, $\varphi: Y \rightarrow Z$ и существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$,
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0 \quad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе***