

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Векторное и смешанное
произведения векторов*

Лектор Рожкова С.В.

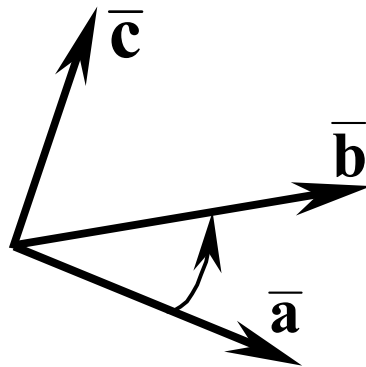
2023г.

§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} называется **правой**, если поворот от вектора \bar{a} к вектору \bar{b} на меньший угол виден из конца вектора \bar{c} против часовой стрелки.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Векторным произведением** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 2) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 3) тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – правая.

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ или $\bar{\mathbf{b}}$ нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.

Обозначают: $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ их векторное произведение меняет знак, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

2) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения, т.е.

$$[\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}] = \lambda[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$

3) Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы.

А именно:

$$[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}].$$
$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) Критерий коллинеарности векторов .

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные \Leftrightarrow их векторное произведение равно нулевому вектору .

5) Геометрический смысл векторного произведения .

Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах .

6) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{array} \right| \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

7) Механический смысл векторного произведения.

Если вектор $\bar{\mathbf{F}}$ это сила, приложенная к точке M , то векторное произведение

представляет собой момент силы $\bar{\mathbf{F}}$ относительно точки O .

$$[\overline{OM}, \bar{\mathbf{F}}]$$

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Смешанным произведением трех векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}]) .$$

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При циклической перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ их смешанное произведение не меняется, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

2) При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.

3) Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения, т.е.

$$(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda \bar{\mathbf{c}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.

А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) Критерий компланарности векторов.

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны \Leftrightarrow их смешанное произведение равно нулю .

6) Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, то $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ образуют правую тройку.

Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, то тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – левая.

7) Геометрический смысл смешанного произведения .

Модуль смешанного произведения некопланарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

8) Следствие свойства 7.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$, равен $1/6$ модуля их смешанного произведения.

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ имеют координаты:*

$$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\},$$

то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$