Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Координаты вектора. Простейшие задачи векторной алгебры. Скалярное произведение векторов***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

4. Координаты вектора

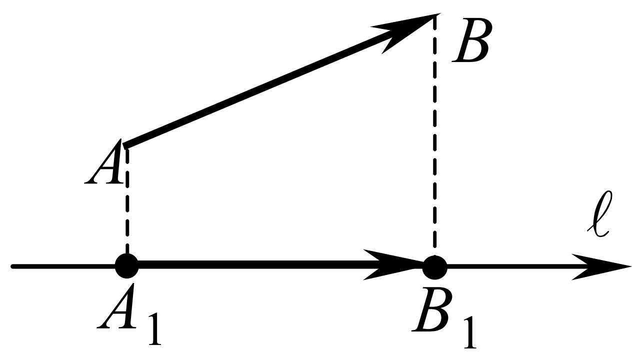
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Коэффициенты в разложении вектора по базису называются* ***координатами*** *этого вектора в данном базисе.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободных векторов в декартовом прямоугольном базисе:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют* ***осью***.

Пусть ℓ – ось, $\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор.

Пусть A_1 и B_1– ортогональные проекции на ось ℓ точек A и B соответственно.



Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем *векторной проекцией вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* ℓ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Проекцией*** *(ортогональной проекцией) вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* ℓ *называется длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *сонаправлены, и со знаком минус – если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *противоположно направлены.*

Обозначают: $\text{Пр}^{\perp}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$.

ТЕОРЕМА 7. *Координаты вектора* $\bar{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ $(V^{(3)})$ *в декартовом прямоугольном базисе* **i, j** **(i, j, k)** *есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.*

ТЕОРЕМА 8.

1) Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, вектор b имеет в том же базисе координаты $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, то вектор $a + b$ будет иметь в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n\}$.
2) Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, то для любого числа λ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты

$$\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n\}.$$

ТЕОРЕМА 9 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\}$ *и* $\bar{\mathbf{b}} = \{\beta_1 ; \beta_2 ; \beta_3\}$ *коллинеарны* $\Leftrightarrow$ *их координаты пропорциональны*, т.е.

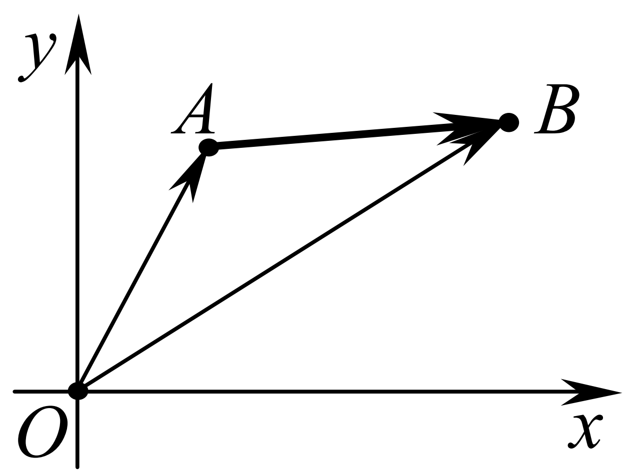
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k.$$

Причем, если коэффициент пропорциональности $k > 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– сонаправлены*; *если* $k < 0$, *то* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– противоположно направлены* .

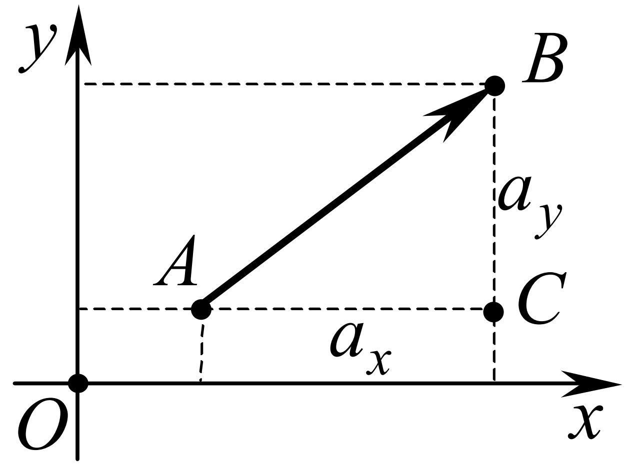
§8. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем в пространстве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис **i, j, k** (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.



ЗАДАЧА 2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.



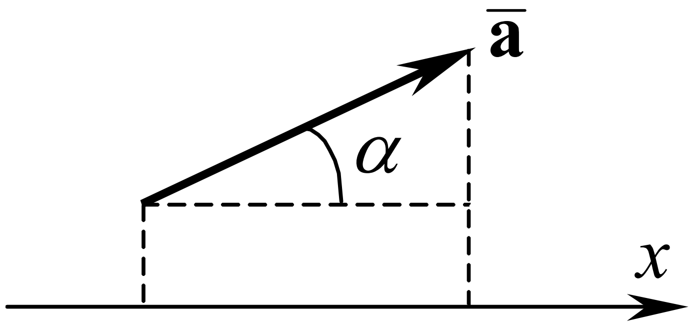
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

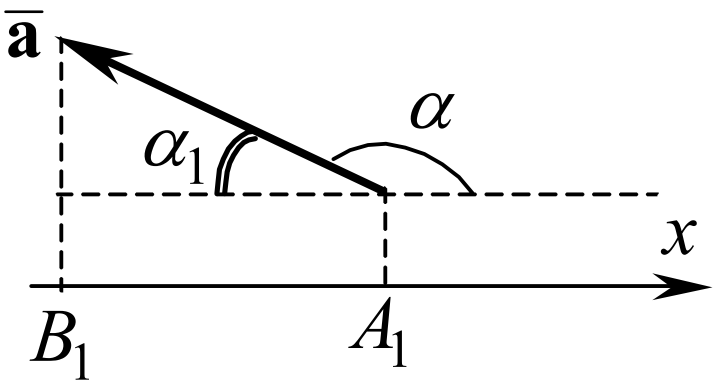
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ортом*** *вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_0$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину* .

Геометрический смысл координат орта вектора

Пусть α , β и γ – углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox , Oy и Oz соответственно .

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$.





К*оординаты орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами*.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_0| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_0 = \{\cos\alpha\,;\cos\beta\,;\cos\gamma\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

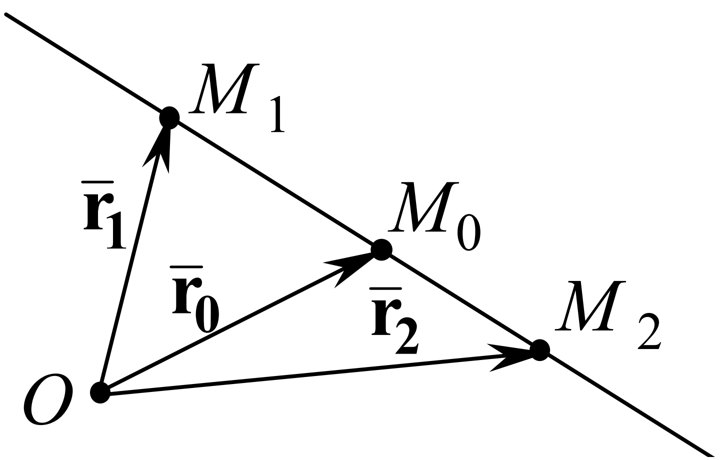
ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка* M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ $(\lambda \neq -1)$ *если*

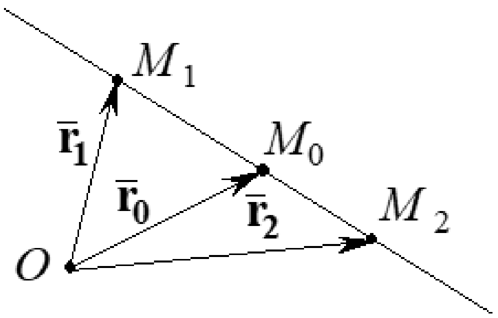
$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$$

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2. В этом случае говорят, что *точка* M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2. В этом случае говорят, что *точка* M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внешнем отношении*.



Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}_1$, $\bar{\mathbf{r}}_2$, $\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-векторы точек M_1, M_2 и M_0 соответственно. Тогда



$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \bar{\mathbf{r}}_0 - \bar{\mathbf{r}}_1, \quad \overline{\mathbf{M_0M_2}} = \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_0.$$

Так как $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_1}}$, то

$$\bar{\mathbf{r}}_0 - \bar{\mathbf{r}}_1 = \lambda \cdot (\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_0),$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_0 + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_0 = \bar{\mathbf{r}}_1 + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_2,$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_0 (1 + \lambda) = \bar{\mathbf{r}}_1 + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_2,$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}}_0 = \frac{\bar{\mathbf{r}}_1 + \lambda \cdot \bar{\mathbf{r}}_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

или в координатной форме:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

В частности, если M_0 – середина отрезка M_1M_2, то

$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \overline{\mathbf{M_0M_1}},$$

т.е. $\lambda = 1$ и формулы (1) и (2) примут вид:

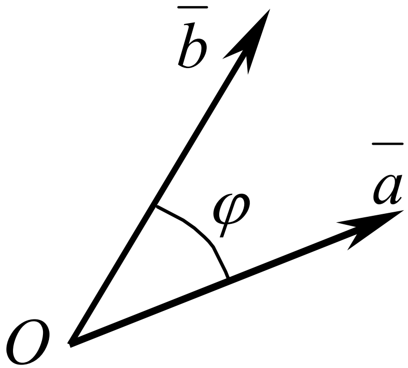
$$\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \frac{\overline{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + \overline{\mathbf{r}}_\mathbf{2}}{2}$$

и

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Скалярным произведением*** *двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число*

$$|\,\bar{\mathbf{a}}\,| \cdot |\,\bar{\mathbf{b}}\,| \cdot \cos\varphi$$

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

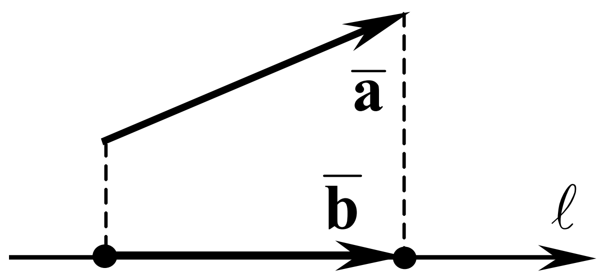
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ (*длины вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\bar{\mathbf{b}}$ *на* $\bar{\mathbf{a}}$). Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = \left| \overline{\mathbf{a}} \right| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{a}}} \overline{\mathbf{b}} = \left| \overline{\mathbf{b}} \right| \cdot \text{Пр}_{\overline{\mathbf{b}}} \overline{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\bar{\mathbf{b}}$.



3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}) = \lambda(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы*. Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}})$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2)$$

5) Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины. Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) = |\,\overline{\mathbf{a}}\,|^2$$

6) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* .

(критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$(\bar{\mathbf{a}}\,,\bar{\mathbf{b}}\,) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) *Если под действием постоянной силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2 , *то работа силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *будет равна*

$$A = \left(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{M_1 M_2}}\right)$$

(физический смысл скалярного произведения).