Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Векторы. Линейные операции на множестве векторов***

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

Глава II. Векторная алгебра

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*.

Векторное исчисление подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ*. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

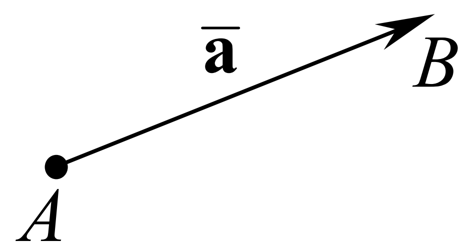
§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вектором*** *называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора. Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (***параллельными***).

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

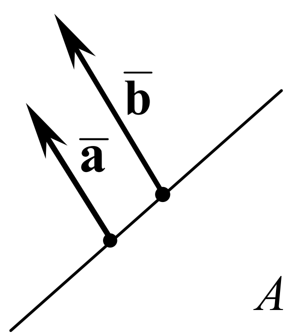
Коллинеарные векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ называются ***сонаправленными*** если

- их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых)
- один из лучей [AB) или [CD) целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой).

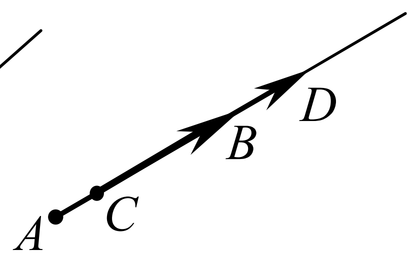
В противном случае коллинеарные векторы называются ***противоположно направленными***.

Записывают: $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

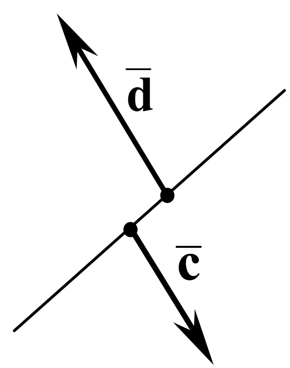
и $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



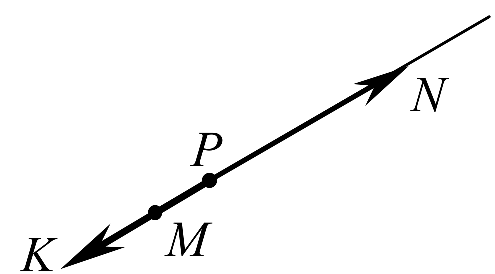
$\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$



$\overline{\mathbf{AB}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{CD}}$



$\overline{\mathbf{c}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{d}}$



$\overline{\mathbf{MN}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными*** (***ортогональными***).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением вектора*** $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$ *, а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$.

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$.

Обозначают: $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$

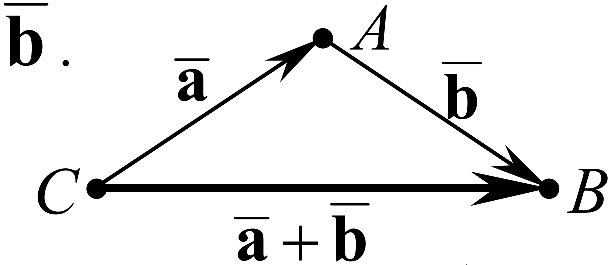
Частный случай: произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

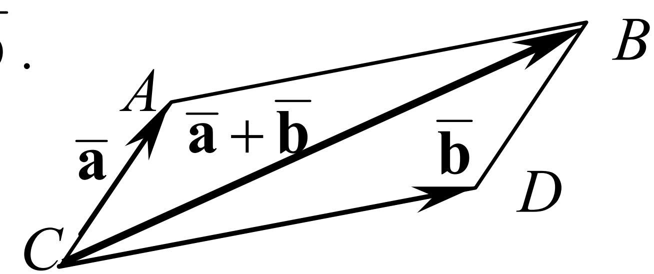
ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило треугольника). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$.

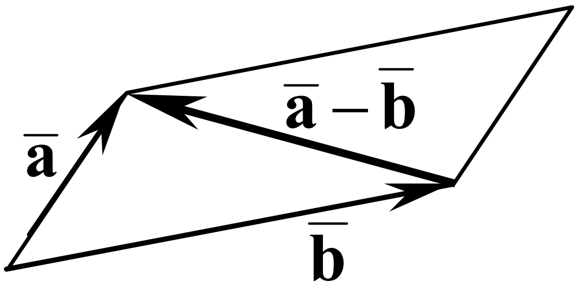


ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке* C *и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$

Сумму $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$ называют ***разностью векторов*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***и*** $\bar{\mathbf{b}}$ и обозначают $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.



3. Понятие линейной зависимости и независимости. Базис

Пусть V – множество векторов, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ***линейно зависимы****, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю и такие, что линейная комбинация*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$$

равна нулевому вектору $\bar{\mathbf{0}}$.

Если равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = \bar{\mathbf{0}}$ *возможно только при условии* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, *то векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *называют* ***линейно независимыми****.*

ЛЕММА 4 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов).

Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *линейно зависимы* $\Leftrightarrow$ *хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

Замечание. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальная линейно независимая система векторов называется **базисом** множества векторов.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ образуют базис если выполняются два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;
2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора $a \in V$.