

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Матрицы и действия над ними.*

Лектор Рожкова С.В.

2023 г.

Литература

- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*
- Ефимов Н.В. *Краткий курс аналитической геометрии*
- Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*
- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. *Сборник задач по линейной алгебра и аналитической геометрии*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. *Руководство к решению задач по аналитической геометрии*

Глава I. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Матрицей размера $m \times n$** называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая m строк и n столбцов.

Если $m \neq n$, то матрицу называют **прямоугольной**.

Если $m = n$, то матрицу называют **квадратной, порядка n** .

Элементы, из которых составлена матрица, называются **элементами матрицы**.

Например, a_{24} —

a_{13} —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n})$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad (i, j = \overline{1, n})$$

Две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} считаются *равными*, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в \mathbf{A} и \mathbf{B} на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Некоторые частные случаи матриц

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$ называют

матрицей-столбцом длины m

2) Матрицу $\mathbf{A} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) = (a_{1i})$, размера $1 \times n$ называют *матрицей-строкой длины n*

3) *Нулевой* матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ (где $k = \min\{m, n\}$) будем называть **элементами главной диагонали матрицы**.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется **единичной**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначают: \mathbf{E} или \mathbf{E}_n .

5) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n . Элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}$ будем называть **элементами побочной диагонали матрицы**.

Квадратные матрицы, у которых все элементы ниже (выше) главной или побочной диагонали равны нулю, называются **треугольными** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \dots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

б) Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***трапецевидной***, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Линейные операции над матрицами

- 1) Умножение матрицы на число;
- 2) Сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})$ на число α называется такая матрица $\mathbf{B}=(b_{ij})$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы \mathbf{A} на число α , т.е. $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.*

Обозначают: $\alpha \cdot \mathbf{A}$, $\alpha \mathbf{A}$.

Частный случай: $(-1) \cdot \mathbf{A}$ – *противоположная матрице \mathbf{A} ,*

Обозначают $-\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Суммой двух матриц** $\mathbf{A}=(a_{ij})$ и $\mathbf{B}=(b_{ij})$ одинакового размера, называется такая матрица $\mathbf{C}=(c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Обозначают: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$

Частный случай: $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ – **разность матриц** \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Обозначают: $\mathbf{A}-\mathbf{B}$

3. Нелинейные операции над матрицами

- 1) Умножение двух матриц;
- 2) Транспонирование матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – матрица размера $t \times n$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ – матрица размера $n \times k$ (т.е. количество столбцов в матрице \mathbf{A} совпадает с количеством строк матрицы \mathbf{B}). **Произведением матрицы \mathbf{A} на матрицу \mathbf{B}** называется матрица $\mathbf{C}=(c_{ij})$ размера $t \times k$ такая, что каждый ее элемент c_{ij} является произведением i -й строки матрицы \mathbf{A} на j -й столбец матрицы \mathbf{B} , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Обозначают: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, \mathbf{AB} .

Свойства операции умножения матриц

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$

2) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность умножения матриц)

3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
4) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ } — дистрибутивность умножения

матриц относительно сложения матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть \mathbf{A} – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, полученная из \mathbf{A} заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** к \mathbf{A} и обозначается \mathbf{A}^T .

Операция нахождения матрицы \mathbf{A}^T называется **транспонированием** матрицы \mathbf{A} .

Свойства операции транспонирования матриц

- 1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
- 2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
- 3) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$;
- 4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.