

Раздел: Теория вероятностей и математическая
статистика

Тема: *Проверка статистических
гипотез*

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

§17. Понятие статистической гипотезы и связанные с ней понятия

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

НАПРИМЕР:

- 1) Генеральная совокупность распределена по закону Пуассона.
- 2) Математическое ожидание генеральной совокупности равно 100.
- 3) Дисперсии двух генеральных совокупностей равны.
- 4) На Марсе есть жизнь – не статистическая гипотеза

Проверяемую гипотезу называют **нулевой (основной)**, обозначают её H_0 .

Наряду с выдвинутой гипотезой H_0 рассматривают и противоречащую ей гипотезу, которую называют **конкурирующей (альтернативной)** и обозначают H_1 .

НАПРИМЕР.

Пусть известно, что генеральная совокупность распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

где λ – неизвестный параметр распределения.

Полагаем $H_0: \lambda = 10$

Тогда: $H_1: \lambda > 10$ или $H_1: \lambda < 10$

$H_1: \lambda \neq 10$ или $H_1: \lambda = 20$

В зависимости от выборочных данных принимается либо основная гипотеза, либо конкурирующая.

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Обозначим: α – вероятность допустить ошибку 1-го рода,
 β – вероятность допустить ошибку 2-го рода.

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, т.е. отвергнуть верную гипотезу H_0 , называют ***уровнем значимости***.

Уровень значимости принимают обычно 0,05 или 0,01, но может быть и меньше (в зависимости от тяжести последствий ошибки).

§18. Общая схема проверки статистических гипотез

- 1) Задаём уровень значимости α .
- 2) Задаем случайную величину K , называемую **статистическим критерием**, для которой выполняются следующие условия:
 - а) она является функцией от выборочных данных, т.е.
$$K=K(x_1,x_2,\dots,x_n);$$
 - б) её значения позволяют судить о «расхождении выборки с гипотезой H_0 », т.е. о том, надо принимать или отвергать гипотезу H_0 ;
 - в) распределение этой величины известно.

Статистический критерий – свой для каждого вида гипотез (описаны в литературе).

3) Вычисляем значения критерия, подставляя в него выборочные данные.

Это число называют **наблюдаемым значением критерия** и обозначают $K_{набл}$.

4) Находим **критическую область** данного критерия, т.е. совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

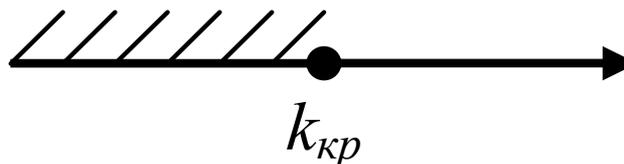
Все остальные значения критерия образуют область, называемую **областью принятия гипотезы**.

Если наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то гипотезу отвергаем, если в область принятия гипотезы, то принимаем

Точки, которые отделяют критическую область от области принятия гипотезы, называют **критическими точками**.

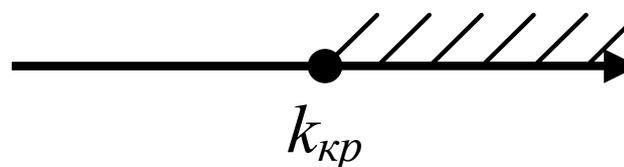
Виды критических областей:

а) левосторонняя



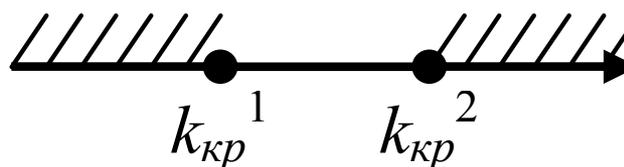
$$K < k_{кр}$$

б) правосторонняя



$$K > k_{кр}$$

в) двусторонняя



$$K < k_{кр}^1$$
$$K > k_{кр}^2$$

Критическую область W целесообразно находить согласно следующим требованиям:

а) $p(K \in W) = \alpha$;

б) вероятность β ошибки 2-го рода – минимальная,
 \Rightarrow вероятность $(1 - \beta)$ – максимальная.

Вероятность $(1 - \beta)$ не допустить ошибку 2-го рода (т.е. отвергнуть гипотезу H_0 , когда она неверна), называется ***мощностью*** критерия.

Вид критической области зависит от вида конкурирующей гипотезы.

Критические точки определяются по специальным таблицам

Таким образом, схема проверки гипотезы:

1 этап

Задаём уровень значимости α .

2 этап

Записываем статистический критерий.

3 этап

Вычисляем наблюдаемое значение критерия.

4 этап

Находим критическую область и проверяем, попадает ли в неё наблюдаемое значение критерия.

§19. Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием нормального распределения

Пусть генеральная совокупность распределена нормально.

Параметры распределения a , σ – неизвестны.

Проверить гипотезу: $H_0: a = a_0$, где a_0 – некоторое число.

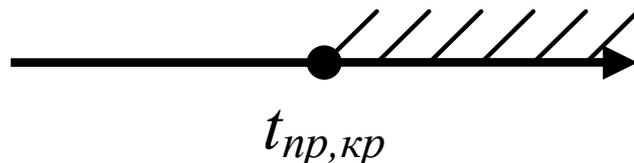
Критерий Стьюдента (t-критерий):
$$T = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{s}$$

СВ T имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы .

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

$$1. \quad H_1 : a > a_0$$

Критическая область W – правосторонняя:



Из требования 1 для критической области:

$$p(T \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T > t_{np,kr}) = \alpha$$

$$p(T < t_{np,kr}) = 1 - p(T > t_{np,kr}) = 1 - \alpha$$

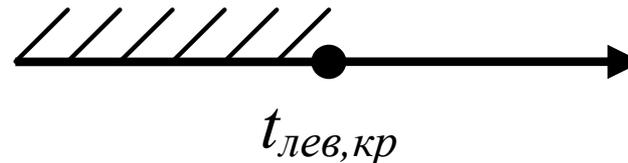
$$p(T < t_{np,kr}) = F(t_{np,kr})$$

где $F(x; k)$ – функция распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

$$\Rightarrow F(t_{\delta, \hat{e}\delta}; k) = 1 - \alpha$$

2. $H_1 : a < a_0$

Критическая область W – левосторонняя:



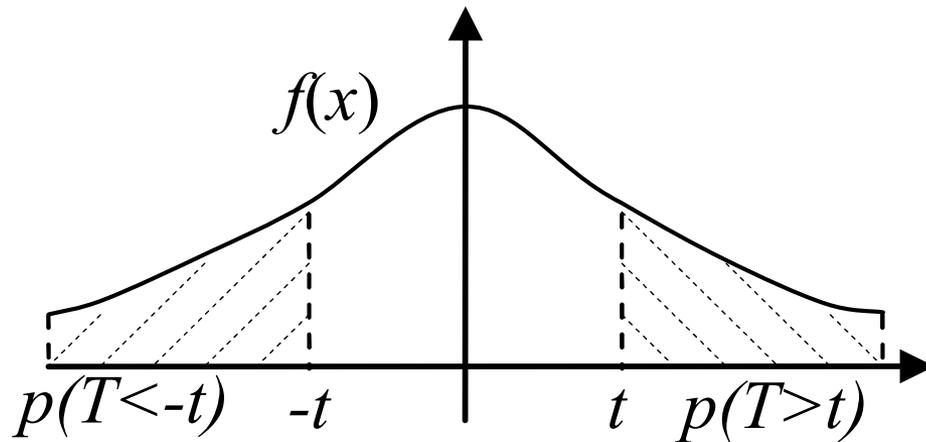
Из требования 1 для критической области:

$$p(T \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T < t_{лев,кр}) = \alpha$$

$$p(T < t_{лев,кр}) = F(t_{лев,кр}; k) = \alpha$$

где $F(x; k)$ – функция распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

Плотность распределения Стьюдента – чётная функция



$$\Rightarrow p(T > t) = p(T < -t)$$

Критическая точка $t_{np,kr}$ находится из требования:

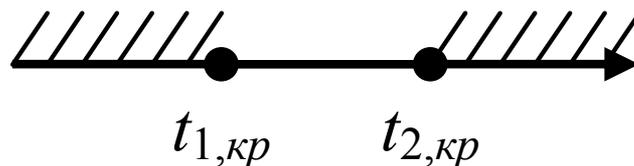
$$p(T > t_{np,kr}) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(T < -t_{np,kr}) = \alpha \quad \Rightarrow$$

$-t_{np,kr}$ является критической точкой для левосторонней области:

$$t_{лев,kr} = -t_{np,kr}$$

3. $H_1 : a \neq a_0$

Критическая область W – двусторонняя:



Пусть $p(T < t_{1,кр}) = p(T > t_{2,кр}) = \alpha / 2$

В силу чётности плотности распределения Стьюдента:

$$t_{1,кр} = -t_{2,кр}$$

Аналогично пунктам **1** и **2** получаем:

$$F(t_{2,кр}; k) = (1 - \alpha) / 2, \quad t_{1,кр} = -t_{2,кр}$$

ИЛИ

$$F(t_{1,кр}; k) = \alpha / 2, \quad t_{2,кр} = -t_{1,кр}$$

Пример.

Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, $a = 35$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

Требуется при уровне значимости 0.05 проверить нулевую гипотезу $H_0: a = 35$ при конкурирующей гипотезе $H_1: a \neq 35$.

x_i	34.8	34.9	35.0	35.1	35.3
n_i	2	3	4	6	5

$$n = 20$$

$$\alpha = 0.05$$

$$H_0: a = 35$$

$$H_1: a \neq 35$$

$$a_0 = 35$$

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

\bar{x} – выборочная средняя

s – исправленное среднее

квадратическое отклонение

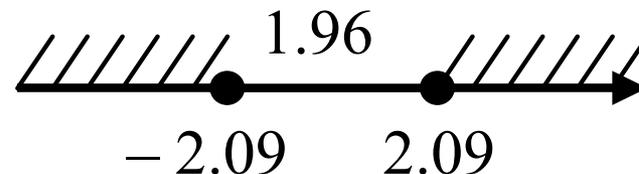
$$\bar{x} = 35.07$$

$$s = 0.16$$

$$T_{\text{набл}} = \frac{35.07 - 35}{0.16} \cdot \sqrt{20} \approx 1.96$$

Критическая область

двусторонняя:



Принимаем нулевую гипотезу, то есть станок обеспечивает проектный размер изделий.

§20. Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения

Осуществляется по той же схеме, что и проверка гипотезы о параметрах распределения.

Критерии, с помощью которых проверяется гипотеза о теоретическом законе распределения, называются *критериями согласия*.

H_0 : генеральная совокупность имеет некоторое определённое распределение
(т.е. высказано предположение о виде и параметрах распределения)

Например:

- 1) Распределение является нормальным с математическим ожиданием, равным 5 и дисперсией, равной 4.
- 2) СВ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$.

Критерий Пирсона (χ^2 -критерий)

Найдём *теоретические частоты* вариант.

1. Распределение дискретное $\Rightarrow p(x)$.

x_i	x_1	x_2	\dots	x_{l-1}	x_l
p_i	$p_1=p(x_1)$	$p_2=p(x_2)$	\dots	$p_{l-1}=p(x_{l-1})$	$p_l=1-p_1-p_2-\dots-p_{l-1}$

Теоретическая частота появления варианты x_i – это np_i .

2. Распределение непрерывное $\Rightarrow F(x)$.

x_i	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	\dots	(x_{l-1}, x_l)	(x_l, x_{l+1})
p_i	$p_1=p(X < x_2)$ $=F(x_2)$	$p_2=p(x_2 < X < x_3)$ $=F(x_3) - F(x_2)$	\dots	$p_{l-1}=p(x_{l-1} < X < x_l)$ $=F(x_l) - F(x_{l-1})$	$p_l=1-p_1-p_2-\dots-p_{l-1}$

Теоретическая частота попадания в интервал (x_i, x_{i+1}) – это np_i .

Критерий:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n_i – эмпирические частоты

np_i – теоретические частоты

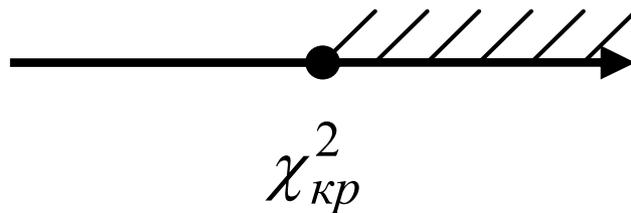
При $n \rightarrow \infty$ случайная величина χ^2 имеет распределение Пирсона с k степенями свободы, где

$$k = l - 1 - r,$$

l – число вариантов (интервалов),

r – число параметров предполагаемого распределения, оцениваемых по выборке

Критическая область W – правосторонняя:



Из требования 1 для критической области:

$$p(\chi^2 \in W) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = \alpha$$

$$p(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = 1 - p(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = 1 - \alpha$$

$$p(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = F(\chi^2_{кр}), \quad F(x) - \text{функция распределения } \chi^2$$

$$\Rightarrow \quad F(\chi^2_{кр}) = 1 - \alpha$$

$F(x)$ – функция распределения Пирсона с $k=l-1-r$ степенями свободы, l – число вариантов (интервалов), r – число параметров, оцениваемых по выборке.

ПРИМЕР.

На экзамене по некоторому предмету, преподаватель задает студенту только один вопрос по одной из 4-х частей курса.

Из 100 студентов 26 получили вопрос по 1-й части,
32 – по 2-й,
17 – по третьей,
остальные – по четвертой.

Согласуется ли с этими результатами гипотеза о том, что для пришедшего на экзамен имеется одинаковая вероятность получить вопрос по любой части курса.
Уровень значимости принять $\alpha = 0,05$

Статистический ряд:

x_i	1	2	3	4
n_i	26	32	17	25

Теоретическое распределение:

x_i	1	2	3	4
n_i^*	25	25	25	25

$$\begin{aligned}\chi_{набл}^2 &= \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \\ &= \frac{(26 - 25)^2}{25} + \frac{(32 - 25)^2}{25} + \frac{(17 - 25)^2}{25} + \frac{(25 - 25)^2}{25} = \\ &= \frac{1 + 49 + 64}{25} = \frac{114}{25} = 4,56\end{aligned}$$

Число степеней свободы: $k = 4 - 1 = 3$

Критическая точка χ^2 для при $\alpha = 0,05$ и $k = 3$:

$$\chi_{кр}^2(0,05; 3) = 7,82$$

Так как $4,56 < 7,82$, то оснований отвергать гипотезу о равной вероятности всех значений СВ нет.

