

Раздел: Теория вероятностей и математическая  
статистика

Тема: *Двумерные случайные величины*

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

# §10. Двумерные случайные величины

## 1. Многомерные СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.  ***$n$ -мерной случайной величиной*** ( ***$n$ -мерным случайным вектором***) называется упорядоченная совокупность  $n$  одномерных СВ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

При этом каждая СВ  $X_i$  называется ***составляющей*** или ***компонентой***  $n$ -мерной СВ.

Геометрическая интерпретация:

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  – случайная точка в  $n$ -мерном пространстве с координатами  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Различают два вида  $n$ -мерных СВ – дискретные и непрерывные.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**  $n$ -мерная СВ называется **дискретной**, если все ее компоненты – дискретные.

$n$ -мерная СВ называется **непрерывной**, если все ее компоненты – непрерывные.

$n$ -мерная СВ задается с помощью **закона распределения** – соотношения, устанавливающего связь между значениями  $n$ -мерной СВ и соответствующими им вероятностями.

Виды законов распределения:

для  $n$ -мерных ДСВ: 1)  $n$ -мерная таблица распределения;  
2) функция распределения;

для  $n$ -мерных НСВ: 1) функция распределения;  
2) плотность распределения вероятностей.

Для простоты изложения в дальнейшем будем рассматривать двумерные СВ. На общий случай все результаты легко переносятся.

## 2. Способы задания двумерных СВ

### а) Таблица распределения

Пусть  $X, Y$  – одномерные ДСВ

$X$  может принимать значения  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$Y$  может принимать значения  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

$\Rightarrow$  СВ  $(X, Y)$  – двумерная СВ с множеством возможных значений  $(x_i; y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$  (множество значений СВ – конечно или счётно).

Пусть  $P(x_i; y_j) = P(X = x_i; Y = y_j) = p_{ij}$

**Таблицей распределения** двумерной ДСВ  $(X, Y)$  называется двумерная таблица, в которой перечислены все возможные значения  $(x_i; y_j)$  и соответствующие им вероятности:

	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	...	$p_{i1}$	...
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	...	$p_{i2}$	...
...	...	...	...	...	...
$y_j$	$p_{1j}$	$p_{2j}$	...	$p_{ij}$	...
...	...	...	....	...	....

*Замечание.* Поскольку в результате опыта СВ обязательно примет одно из своих возможных значений  $(x_i; y_j)$ , и эти события всегда несовместны, то

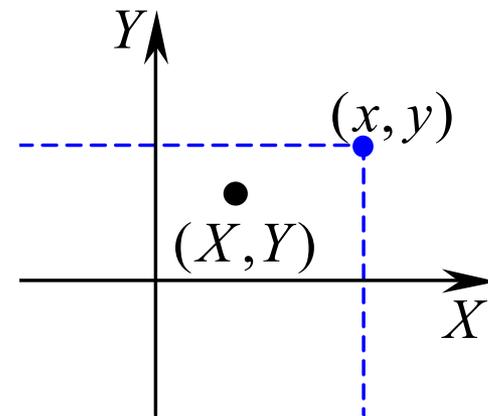
$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

## б) Функция распределения двумерной ДСВ и НСВ

Пусть  $(X, Y)$  – двумерная СВ (дискретная или непрерывная)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Функцией распределения (или интегральным законом распределения)* двумерной СВ  $(X, Y)$  (дискретной или непрерывной) называется функция  $F(x, y)$ , определяемая равенством  $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$ .

Геометрически  $F(x, y)$  – вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в квадрант, расположенный левее и ниже точки  $(x; y)$ .



Так как при нахождении  $F(x, y)$  СВ  $X$  и  $Y$  рассматриваются совместно, то  $F(x, y)$  называют также *совместной функцией распределения СВ*  $X$  и  $Y$ .

# СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 1) Значения  $F(x,y)$  принадлежат  $[0; 1]$ .
- 2) Функция  $F(x,y)$  не убывает по каждому аргументу в отдельности, т.е.

$$\text{если } x_1 < x_2, \text{ то } F(x_1,y) \leq F(x_2,y);$$

$$\text{если } y_1 < y_2, \text{ то } F(x,y_1) \leq F(x,y_2).$$

- 3) Справедливы предельные соотношения:

$$F(-\infty, y) = 0; \quad F(x, -\infty) = 0; \quad F(-\infty, -\infty) = 0.$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

- 4) Зная функцию  $F(x,y)$  можно найти функции распределения  $F(x)$  и  $F(y)$  ее составляющих  $X$  и  $Y$ :

$$F(x) = F(x; +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y),$$

$$F(y) = F(+\infty; y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y).$$

5)  $F(x,y)$  – непрерывная слева по каждому аргументу.

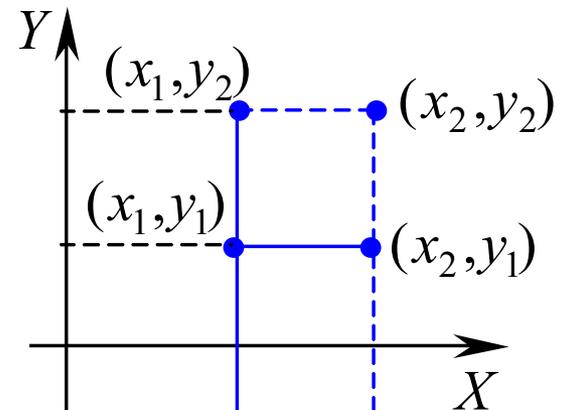
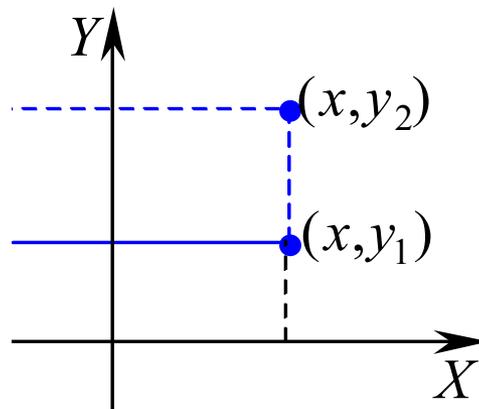
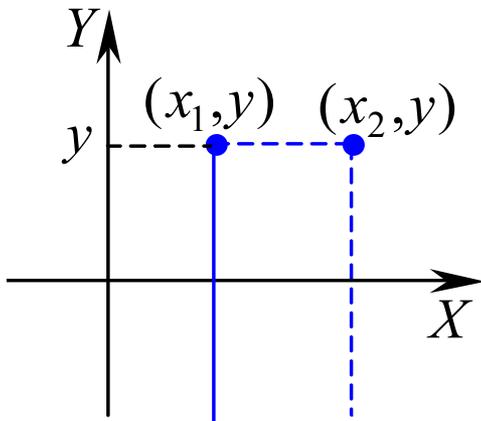
6) Вероятность попадания случайной точки в полуполосу:

$$P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y);$$

$$P(X < x, y_1 \leq Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

7) Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник:

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = \\ = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \end{aligned}$$



## в) Плотность распределения вероятностей

Пусть  $(X, Y)$  – непрерывная двумерная СВ,

$F(x, y)$  – функция распределения СВ  $(X, Y)$ ,

$F(x, y)$  – имеет непрерывную  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$  (всюду, за

исключением возможно конечного числа кривых).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения)* двумерной СВ  $(X, Y)$  называется функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

График функции  $f(x, y)$  называют *поверхностью распределения* двумерной СВ.

# СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аналогичны свойствам плотности распределения вероятностей для одномерной СВ. А именно:

1)  $f(x,y) \geq 0$ .

2) Для функции  $f(x,y)$  выполняется условие нормирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1.$$

3) Для функций  $f(x,y)$  и  $F(x,y)$  справедливо равенство:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy.$$

5) Для функций распределения составляющих двумерной СВ справедливы формулы

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy, \quad F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

6) Плотности распределения составляющих двумерной СВ находятся по формулам:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

7) Вероятность попадания двумерной СВ в заданную область.

Пусть  $(\sigma)$  – произвольная квадратируемая плоская область.

Тогда

$$P[(X, Y) \in (\sigma)] = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

$\Rightarrow$  вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в плоскую область  $(\sigma)$  численно равна объему цилиндрического тела с основанием  $(\sigma)$  и ограниченного функцией  $f(x, y)$  (вероятностный смысл  $f(x, y)$ ).

### 3. Двумерные СВ с независимыми компонентами

Пусть  $X, Y$  – одномерные СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. СВ  $X$  и  $Y$  называются **независимыми**, если  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  независимы события « $X < x$ » и « $Y < y$ ». В противном случае СВ  $X$  и  $Y$  называются зависимыми.

Из определения независимых событий и теоремы умножения вероятностей получаем:

События « $X < x$ » и « $Y < y$ » – независимы  $\Leftrightarrow$  вероятность их совместного наступления равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y).$$

$\Rightarrow$  можно дать другое определение независимых СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. СВ  $X$  и  $Y$  называются **независимыми**, если функция распределения двумерной СВ  $(X, Y)$  равна произведению функций распределения составляющих ее одномерных СВ, т.е.

$$F(x, y) = F(x) \cdot F(y).$$

Пусть  $X, Y$  – независимые СВ,

$f(x), f(y)$  – плотность распределения вероятностей СВ  $X$  и  $Y$  соответственно,

$f(x, y)$  – плотность вероятностей двумерной СВ  $(X, Y)$ .

Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА.**

*СВ  $X$  и  $Y$  независимы  $\Leftrightarrow$  плотность вероятностей их совместного распределения (т.е. двумерной СВ  $(X, Y)$ ) равна произведению их плотностей распределения вероятностей, т.е.*

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

## 4. Числовые характеристики двумерной СВ

Основные числовые характеристики двумерной СВ  $(X, Y)$ :

- а) математические ожидания  $M[X]$  и  $M[Y]$ ,
- б) дисперсии  $D[X]$  и  $D[Y]$ ,
- в) ковариация
- г) коэффициент корреляции.

### а) Математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$

Математические ожидания  $M[X]$  и  $M[Y]$  определяются по следующим формулам:

1) если  $(X, Y)$  – дискретная СВ, то

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot \left( \sum_{j=1}^{m(\infty)} P_{ij} \right),$$
$$M[Y] = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot \left( \sum_{i=1}^{n(\infty)} P_{ij} \right).$$

**Замечание.** Принято записывать:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} x_i p_{ij}, \quad M[Y] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j p_{ij}.$$

2) если  $(X, Y)$  – непрерывная СВ с плотностью вероятностей  $f(x, y)$ , то

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$M[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy.$$

**Замечание.**  $M[X]$  и  $M[Y]$  существуют, если ряды (интегралы) в формулах их определяющих, сходятся абсолютно.

В противном случае говорят, что СВ **не имеет математического ожидания.**

Математические ожидания  $M[X]$  и  $M[Y]$  – характеристики положения значений СВ на плоскости.

Они являются координатами центра рассеивания значений двумерной СВ.

Математические ожидания  $M[X]$  и  $M[Y]$  обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание одной СВ.

## б) Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$

Дисперсии  $D[X]$  и  $D[Y]$  определяются по формулам:

1) если  $(X, Y)$  – дискретная СВ, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (x_i - M[X])^2 p_{ij},$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (y_j - M[Y])^2 p_{ij}.$$

2) если  $(X, Y)$  – непрерывная СВ с плотностью вероятностей  $f(x, y)$ , то

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y])^2 \cdot f(x, y) dx dy.$$

Дисперсии  $D[X]$  и  $D[Y]$  характеризуют рассеивание значений двумерной СВ вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Дисперсии  $D[X]$  и  $D[Y]$  обладают теми же свойствами, что и дисперсия одной СВ.

В частности, остается справедливой формула

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 .$$

## в) ковариация

Пусть  $X, Y$  – СВ, имеющие математические ожидания  $M[X]$  и  $M[Y]$  соответственно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Ковариацией (корреляционным моментом) СВ  $X$  и  $Y$  называется математическое ожидание произведения их отклонений:*

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])].$$

Используя свойства математического ожидания, получаем:

$$\text{cov}(X, Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y] \quad (1)$$

В частности, при  $X = Y$  из (1) получаем:

$$\text{cov}(X, Y) = M[X^2] - M[X]^2 = D[X]$$

Кроме того, из (1) получаем:  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$

Понятие ковариации позволяет получить формулу для дисперсии суммы 2-х произвольных СВ. А именно:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\text{cov}(X, Y).$$

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ КОВАРИАЦИИ

Пусть  $X$  и  $Y$  – независимые СВ.

Тогда  $X - M[X]$  и  $Y - M[Y]$  – тоже независимы.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) &= M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])] = \\ &= M[X - M[X]] \cdot M[Y - M[Y]] = 0\end{aligned}$$

**ВЫВОД:**  $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$  – *необходимое условие независимости СВ  $X$  и  $Y$ .*

Однако это условие не является достаточным.

Существуют зависимые  $X$  и  $Y$ , для которых  $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ .

В общем случае справедливы утверждения:

1)  $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X$  и  $Y$  – зависимые СВ.

2)  $\operatorname{cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow$  о характере связи  $X$  и  $Y$  ничего сказать нельзя

Таким образом, *ковариация – числовая характеристика взаимосвязи СВ.*

## г) коэффициент корреляции

Недостаток ковариации – ее размерность равна произведению размерностей отклонений СВ от своих математических ожиданий (т.е. произведению размерностей СВ).

Для устранения этого недостатка вводят безразмерную величину – коэффициент корреляции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина  $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$  называется **коэффициентом корреляции** (линейным коэффициентом корреляции, коэффициентом корреляции Пирсона)

⇒ коэффициент корреляции также является числовой характеристикой взаимосвязи СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВ называются **коррелированными**, если  $r(X, Y) \neq 0$ .

Если  $r(X, Y) = 0$ , то СВ называют **некоррелированными**.

⇒ независимые СВ – некоррелированные.

Зависимые СВ – могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

## СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1)  $|r(X, Y)| \leq 1$ ;

2) если  $|r(X, Y)| = 1$ , то СВ  $X$  и  $Y$  связаны линейной зависимостью, т.е.

$$Y = aX + b, \text{ где } a, b \text{ – числа.}$$