Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Законы распределения случайных величин***

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

§9. Законы распределения случайных величин

Есть законы распределения, которые встречаются на практике значительно чаще других.

Такими законами распределения являются:

Для ДСВ: 1) биномиальный закон распределения;

2) распределение Пуассона.

Для НСВ: 1) равномерное распределение;

2) показательное распределение;

3) нормальное распределение.

1. Биномиальный закон распределения (распределение Бернулли)

Пусть ДСВ X принимает значения $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что ДСВ X имеет* ***биномиальное распределение****, если* $P(X=m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, *где* $p+q=1$.

$\Rightarrow$ СВ, распределенная по биномиальному закону, может появиться только в результате серии испытаний, проходящих по схеме Бернулли, причем при небольших n.

Числовые характеристики СВ X, имеющей биномиальное распределение:

1) $M[X] = np$;

2) $D[X] = npq$.

2. Распределение Пуассона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что ДСВ X имеет* ***распределение Пуассона****, если*

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = n \cdot p$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

Числовые характеристики СВ *X*, имеющей распределение Пуассона:

1) $M[X] = \lambda$;

2) $D[X] = \lambda$.

Замечание. Распределение Пуассона используется вместо биномиального распределения для случая, когда

1) число *n* независимых испытаний в схеме Бернулли велико, а вероятность *p* появления события – мала ($p < 0{,}1$).

2) $np \approx npq$ (т.е. $D[X_{\text{Пуассона}}] \approx D[X_{\text{бином.}}]$)

3. Равномерное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НСВ X *называется* ***равномерно распределенной на отрезке*** $[a;b]$, *если ее плотность вероятностей имеет вид*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;\,b];\\ 0, & x\notin[a;\,b].\end{cases}$$

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

2) Вероятность попадания в интервал $[\alpha;\beta]\in[a;b]$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

3) Числовые характеристики СВ X, имеющей равномерное распределение:

а) $\mathrm{M}[X] = \dfrac{b+a}{2}$;

б) $\mathrm{D}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

4. Показательное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НСВ X *называется распределенной по* ***показательному закону****, если ее плотность вероятностей имеет вид*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Число λ называется ***параметром*** показательного распределения.

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0.\end{cases}$$

2) Вероятность попадания в интервал $[\alpha;\beta]\in[0;+\infty]$:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}$$

3) Числовые характеристики СВ X, имеющей показательное распределение:

а) $\mathrm{M}[X]=\dfrac{1}{\lambda}$ – вероятностный смысл параметра λ;

б) $\mathrm{D}[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

5. Нормальное распределение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что* НСВ X *имеет* ***нормальное распределение*** (***распределение Гаусса***), *если ее плотность вероятностей имеет вид*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$.

Числа a и σ называется ***параметрами нормального распределения***.

Исследование функции $f(x)$:

1. $D(f)=\mathbb{R}$.
2. $f(x)>0$.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$\Rightarrow$ ось Ox – горизонтальная асимптота графика функции.

4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

5. График $f(x)$ симметричен относительно прямой x = a.

6. Нормальная кривая в точках $x = a \pm \sigma$ имеет перегиб,

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

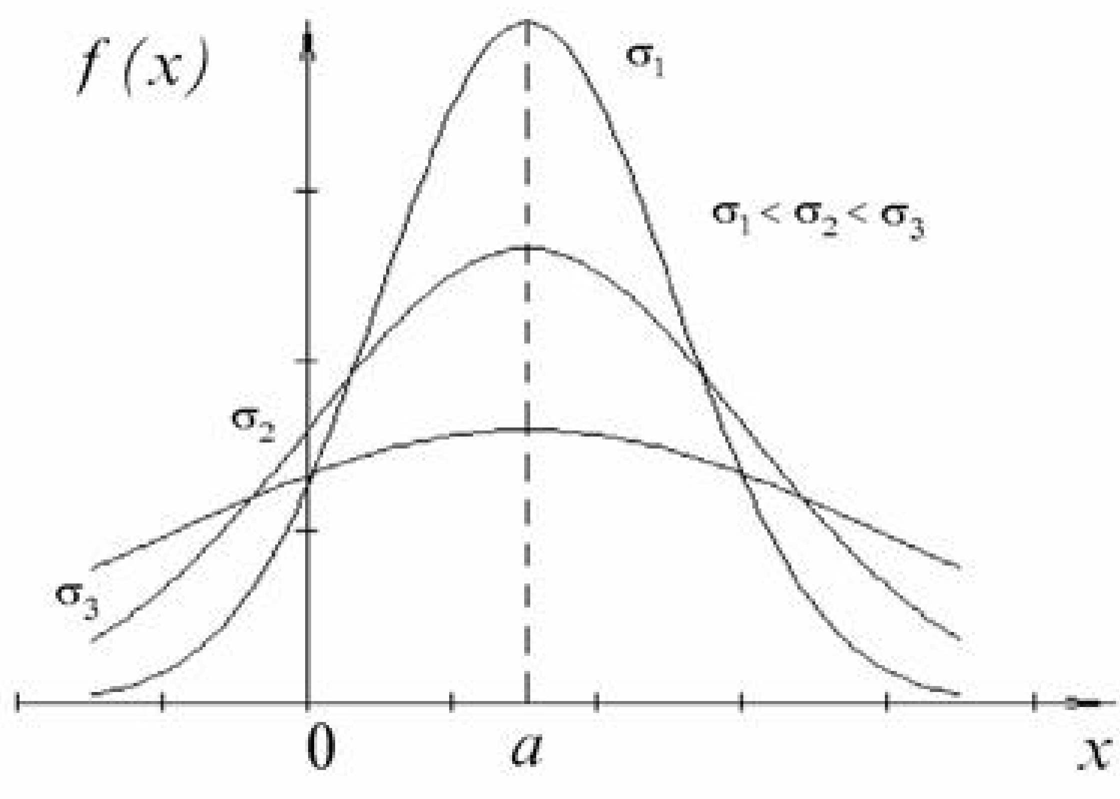

График функции $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ называют ***нормальной кривой*** (***кривой Гаусса***)

Частный случай: $a = 0$, $\sigma = 1$ – нормированная функция Гаусса.

СВ, распределенная по нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$, называется ***стандартной нормальной*** СВ.

Основные характеристики равномерного распределения:

1) Функция распределения: $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$,

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

2) Вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

3) Числовые характеристики СВ X, имеющей равномерное распределение:

а) M[X] = a ;

б) $D[X] = \sigma^2$.

$\Rightarrow \sigma_x = \sigma$.

Таким образом, нормальный закон полностью определен математическим ожиданием и дисперсией.

4) Правило «трех сигм»:

Вероятностью отклонения нормально распределенной СВ от ее МО на величину, большую 3σ, можно пренебречь.

Действительно,

$$P(\left| X - \mathrm{M}[x] \right| \le 3\sigma_x) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$