Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Числовые характеристики случайных величин***

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

§8. Числовые характеристики случайных величин

Числовые параметры, которые описывают СВ суммарно и в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками СВ.

Основные числовые характеристики СВ:

математическое ожидание,

дисперсия,

среднее квадратическое отклонение.

1. Математическое ожидание

а) Математическое ожидание ДСВ

Пусть ДСВ X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

ОПРЕДЛЕНИЕ. ***Математическим ожиданием*** ДСВ X *называется сумма ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, *при условии, что этот ряд сходится абсолютно*.

Обозначают: М[X], m_x .

Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ не является абсолютно сходящимся, то говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания***.

$\Rightarrow$ если СВ может принимать только конечное множество значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то она всегда имеет математическое ожидание и оно равно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

ПРИМЕР. Найти М[X], если ДСВ X имеет следующий ряд распределения:

x_i	3	5	7
p_i	0,5	0,4	0,1

Получили: М[X] = 4,2

Таким образом, *математическое ожидание может и не содержаться среди возможных значений* ДСВ.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ МО

Пусть производится серия из n опытов, в результате которых СВ Х приняла значения

$x_1 - m_1$ раз,

$x_2 - m_2$ раз,

…………….,

$x_k - m_k$ раз

$(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$

Тогда среднее арифметическое наблюдаемых значений ДСВ:

$$\mathrm{M}^*[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} =$$

$$= x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*,$$

где $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ – частота события «$X = x_i$».

Но $p_i^* \to p_i$ при $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ при увеличении n среднее арифметическое наблюдаемых значений ДСВ стремится к $\mathrm{M}[X]$.

Таким образом, $\mathrm{M}[X]$ – характеристика положения ДСВ на Ox: она указывает некоторое среднее значение ДСВ, около которого группируются все возможные значения ДСВ. – вероятностный смысл МО.

б) Математическое ожидание НСВ

Пусть X – НСВ с плотностью вероятности $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Математическим ожиданием*** НСВ X *называется несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$, *при условии, что этот интеграл сходится абсолютно*.

Обозначают: M[X], m_x .

Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ не является абсолютно сходящимся, то говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания***.

$\Rightarrow$ если возможные значения НСВ X принадлежат отрезку $[a; b]$, то она всегда имеет математическое ожидание и оно равно

$$\int\limits_{a}^{b} x \cdot f(x)dx$$

ПРИМЕР. Найти М[X] для НСВ, заданной плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x/8 & 0 < x \le 4; \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

в) Функции от случайных величин

Пусть ДСВ X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

$y = \varphi(x)$ – некоторая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функцией* $y = \varphi(X)$ *от* ДСВ X *называется* СВ Y, *которая принимает значения*

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n), \ldots$$

с вероятностями $p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \ldots$

Замечание. Если все значения $y_k = \varphi(x_k)$ различны, то ряд распределения СВ $Y = \varphi(X)$ будет иметь вид

y_i	y_1	y_2	y_3	…	y_n	….
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

Если среди значений $y_k = \varphi(x_k)$ есть равные, то соответствующие столбцы следует объединить в один, сложив соответствующие вероятности.

Аналогично вводится понятие функции от НСВ.

Пусть X – НСВ с плотностью вероятностей $f(x)$.

$y = \varphi(x)$ – монотонная дифференцируемая функция

$y = \mathrm{g}(x)$ – обратная к функции $\varphi(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функцией* $y = \varphi(X)$ *от НСВ* X *называется* СВ Y, *принимающая значения* $\varphi(x)$ *и распределенная по закону с плотностью вероятностей* $f(\mathrm{g}(x)) \cdot |\mathrm{g}'(x)|$.

Замечание. Функцию $\varphi(X)$ можно определить и в случае, когда $\mathrm{g}(x)$ – непрерывная функция. Но общей формулы для плотности вероятностей в этом случае нет.

МО функции от СВ находится по формуле

для ДСВ: $$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i)\, p_i$$

для НСВ: $$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$$

в) Основные свойства МО

1) $\mathrm{M}[C] = C$, где C – const.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathrm{M}[CX] = C \cdot \mathrm{M}[X], \text{ где } C - \text{const}.$$

3) Математическое ожидание линейной комбинации СВ X и Y равно линейной комбинации их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \cdot \mathrm{M}[X] + \beta \cdot \mathrm{M}[Y]$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВ X и Y называются ***независимыми***, если $\forall x, y \in \mathbb{R}$ независимы события «$X < x$» и «$Y < y$». В противном случае СВ X и Y называются ***зависимыми***.

Из определения независимых событий и теоремы умножения вероятностей получаем:

События «$X < x$» и «$Y < y$» – независимы $\Leftrightarrow$ вероятность их совместного наступления равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(X < x\,,\ \ Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)\ .$$

4) Если СВ X и Y – независимы, то $\mathrm{M}[X \cdot Y] = \mathrm{M}[X] \cdot \mathrm{M}[Y]$.

2. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратическое отклонение

Рассмотри СВ X и Y:

x_i	$-0,1$	$0,1$
p_i	$0,5$	$0,5$

y_i	-4	6
p_i	$0,6$	$0,4$

Имеем: $\text{M}[X] = \text{M}[Y] = 0$

$\Rightarrow$ зная только одно математическое ожидание нельзя судить ни о том, какие значения принимает СВ, но о том, как они рассеяны вокруг МО.

Необходимо ввести такую числовую характеристику, которая позволила бы оценить, как рассеяны возможные значения СВ относительно МО.

Пусть X – СВ, имеющая математическое ожидание M[X].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Отклонением*** СВ X ***от ее математического ожидания*** *называется разность* X – M[X].

Найдем M[X – M[X]].

Получим M[X – M[X]] = 0

⇒ отклонение СВ X от ее математического ожидания не может служить хорошей характеристикой рассеивания СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дисперсией*** СВ X *называется математическое ожидание квадрата отклонения* СВ X *от ее математического ожидания.*

Обозначают: D[X].

Таким образом, D[X] = M[(X – M[X])^2]

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D}[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathrm{M}[X])^2 p_i, & X - \text{ÄÑÂ}; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^2 \cdot f(x)dx, & X - \text{ÍÑÂ} \;. \end{cases}$$

На практике, для вычисления дисперсии удобнее пользоваться следующей формулой: $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности отклонения СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Средним квадратическим отклонением* СВ X *от ее математического ожидания* $M[X]$ *называется величина*

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}$$

ПРИМЕР. Найти $D[X]$ ДСВ X, заданной рядом распределения

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

ПРИМЕР. Найти $D[X]$ НСВ X, заданной плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}x, & 0 \le x \le 3; \\ 0, & x \notin [0;\ 3]. \end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ СВ

1) $\mathrm{D}[C] = 0$, где C – const.

2) $\mathrm{D}[X] \geq 0$.

3) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$\mathrm{D}[CX] = C^2 \cdot \mathrm{D}[X], \text{ где } C - \text{const.}$$

3) Дисперсия суммы (разности) двух независимых СВ X и Y равна сумме их дисперсий $\mathrm{D}[X]$ и $\mathrm{D}[Y]$:

$$\mathrm{D}[X \pm Y] = \mathrm{D}[X] + \mathrm{D}[Y]$$

3. Мода и медиана СВ

Недостатки МО и дисперсии – они могут не существовать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Модой ДСВ *называется то ее значение*, *которое она принимает с наибольшей вероятностью*.

Модой НСВ *называется значение* x, *в котором функция плотности вероятностей достигает максимума*.

Обозначают: M(X).

Из определения $\Rightarrow$ мода может быть не единственной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Медианой*** НСВ X *называется действительное число, являющееся корнем уравнения* $F(x) = 0{,}5$.

Обозначают: $\mathrm{Me}(X)$.

Из определения медианы следует, что

$$\text{Если } \mathrm{Me}(X) = x_0 \text{, то } P(X > x_0) = P(X < x_0) = 0{,}5$$

$\Rightarrow$ медиана – точка на оси Ox, такая, что прямая, проведенная через нее параллельно оси Oy, делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности вероятностей и осью Ox.