Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Случайные величины***

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

§7. Случайные величины

1. Определение и виды СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Случайной величиной*** *называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, при этом заранее неизвестно, какое именно*. .

Обозначать СВ будем большими латинскими буквами X, Y, Z и т.д., ее значения – маленькими лат. буквами.

Различают два вида СВ – дискретные и непрерывные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *СВ называется* ***дискретной*** (ДСВ), *если она может принимать конечное или счетное множество значений*.

СВ называется ***непрерывной*** (НСВ), *если она может принимать любое значение из некоторого интервала*.

2. Способы задания СВ

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующим им вероятностями называется ***законом распределения СВ***.

Виды законов распределения:

для ДСВ: 1) ряд распределения;

2) функция распределения;

для НСВ: 1) функция распределения;

2) плотность распределения вероятностей

а) Ряд распределения.
Многоугольник распределения

Пусть ДСВ X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Рядом распределения ДСВ X называется таблица, в которой перечислены возможные значения СВ и соответствующие им вероятности.

ПРИМЕР. Производится 3 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле – 0,4. ДСВ X – число попаданий в мишень. Построить ряд распределения.

Замечание. В результате опыта СВ обязательно примет одно из своих возможных значений x_1, x_2, …, x_n, … и эти события всегда несовместны.

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

(для ДСВ у которой n значений и для ДСВ, имеющей счетное множество значений соответственно).

Построим в декартовой системе координат ломаную с вершинами (x_i; p_i).

Ее называют ***многоугольником распределения***.

б) Функция распределения ДСВ и НСВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Функций распределения*** (*или* ***интегральным законом распределения***) СВ X (*дискретной или непрерывной*) *называется функция* $F(x)$, *определяемая равенством*

$$F(x) = P(\ X < x\ ).$$

График функции $F(x)$ называют ***интегральной кривой распределения***.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1) Значения $F(x)$ принадлежат [0; 1].

Причем $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

2) $F(x)$ – неубывающая функция,

т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Замечание. Позднее покажем, что для НСВ $P(X = x_0) = 0$. Поэтому для НСВ справедливо равенство

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) =$$
$$= P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4) Если СВ непрерывная, то ее функция распределения $F(x)$ – непрерывная.

Если СВ дискретная, то $F(x)$ – непрерывная слева, кусочно – постоянная, имеющая в точках $x = x_\text{i}$ разрывы 1-го рода (скачок). Причем величина скачка равна p_i .

***Замечания*.**

1) Функция называется непрерывной слева в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0-0) = F(x_0).$$

2) Утверждение обратное 4) тоже верно.

Т.е. всякая неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$ для которой

$$\text{а) } 0 < F(x) < 1; \quad \text{б) } F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$$

является функцией распределения некоторой СВ (дискретной или непрерывной).

ПРИМЕР. ДСВ задана своим рядом распределения:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Найти $F(x)$.

б) Плотность распределения вероятностей

Недостаток функции распределения для НСВ: по $F(x)$ нельзя судить о характере распределения СВ в окрестности точки.

Пусть СВ X – непрерывная,
$F(x)$ – функция распределения СВ X,
$F(x)$ – дифференцируемая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел отношения вероятности попадания НСВ X на отрезок $[x;\ x + \Delta x]$ к длине этого отрезка при $\Delta x \to 0$ называется* ***плотностью распределения вероятностей*** (или ***плотностью вероятностей***, или ***дифференциальным законом распределения***).

ОБОЗНАЧАЮТ: $f(x)$

Таким образом, $$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

График функции $f(x)$ называют ***кривой распределения***.

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

1) $f(x) \geq 0$ (следует из определения и свойств пределов).

2) $f(x) = F'(x)$ (следует из определения и свойства 3 функции $F(x)$)

3) Для функции $f(x)$ выполняется ***условие нормирования***:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

4) Для функций $f(x)$ и $F(x)$ справедливо равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

5) Вероятностный смысл $f(x)$:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

6) Геометрический смысл $f(x)$.

Вероятность того, что НСВ примет значение из интервала $(a;b)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Замечание.

Из определения функции $f(x) \Rightarrow P(X = x_0) = 0$.

Действительно, из

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le X \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad P(x_0 \le X \le x_0 + \Delta x) = f(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} P(x_0 \le X \le x_0 + \Delta x)}_{P(X = x_0)} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x]}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = x_0) = 0.$$

ПРИМЕР.

НСВ X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ ax+1, & 0\le x<2; \\ 0, & x\ge 2. \end{cases}$$

Найти а) значение параметра a;

б) функцию $F(x)$;

в) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

г) $P(0{,}5<X<1)$