Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Вероятность событий***

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

§4. Вероятность событий

Вероятность – количественная (числовая) характеристика события, характеризующая степень возможности его появления в результате эксперимента.

1. Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа n равновозможных событий:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

События считаются равновозможными, если нет объективных причин, в силу которых одно событие появлялось бы чаще другого.

Пусть A – событие, которому благоприятствуют m элементарных исходов:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вероятностью события A называется число*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число всех возможных исходов эксперимента,

m – число благоприятных для A исходов эксперимента.

ПРИМЕРЫ.

1) Имеется партия деталей, содержащая 200 деталей 1-го сорта, 100 деталей 2-го сорта и 59 деталей 3-го сорта. Наугад берется одна деталь.

   Чему равна вероятность того, что вынутая деталь а) 1-го сорта; б) 2-го сорта; в) 3-го сорта?

2) Монета бросается 2 раза. Какова вероятность

   а) выпадения герба хотя бы один раз?

   б) двукратного выпадения герба?

2. Геометрическая вероятность

Пусть пространство элементарных исходов Ω – некоторая область G плоскости (прямой, пространства), причем все ее точки равноправны,

g – некоторое подмножество G.

В область G наудачу бросается точка.

Событие A – попадание точки в область g.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вероятностью попадания точки в область g называется число

$$P(A) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)},$$

где $\mu(G)$ – мера области G (площадь, длина или объем),

$\mu(g)$ – мера области g.

Такое определение вероятности называется ***геометрическим***.

Геометрическое определение – обобщение понятия вероятности на случай бесконечного числа равновозможных исходов.

ПРИМЕРЫ.

1) Задача о встрече.

Два человека договорились встретиться в определенном месте между 10 и 11 часами. Пришедший ждет другого 20 минут и уходит. Чему равна вероятность встречи, если приход каждого из них происходит в случайный момент времени и моменты прихода независимы.

2) Задача Бюффона.

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расстояние между которыми 2a. На плоскость бросается шест, длина которого 2ℓ $(\ell < a)$. Найти вероятность того, что шест пересечет какую-либо прямую.

3. Статистический подход

ЗАДАЧА. Определить вероятность того, в семье, ожидающей пополнения, родится девочка.

Ни классическое, ни геометрическое определение вероятности здесь ответа не даст, как, впрочем, и в ряде других задач естественно-научного и технического характера. В таких случаях для определения вероятности используют статистический подход.

Пусть A – событие, которое может появиться в результате некоторого эксперимента.

Проводим серию из n_1 опытов. Событие A появилось в этой серии опытов m_1 раз.

Число $P_1(A) = \dfrac{m_1}{n_1}$ называют ***относительной частотой события А в данной серии опытов***.

Проведем другую серию из n_2 опытов, m_2 – количество появлений события A. Получаем относительную частоту

$$P_2(A) = \frac{m_2}{n_2}.$$

И т.д.

Если в различных сериях опытов относительные частоты отличаются друг от друга мало, то говорят, что ***частота обладает свойством устойчивости***.

В качестве вероятности в этом случае принимают число, около которого колеблется частота.

Основанием этого служит теорема Я. Бернулли о том, что при неограниченном увеличении числа опытов частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $\left| P_n(A) - P(A) \right| < \varepsilon$ с увеличением n неограниченно приближается к 1).

Введенную таким образом вероятность называют ***статистической***.

Установить экспериментально устойчивость частоты некоторого события можно только путем проведения многих испытаний в одинаковых условиях.

ПРИМЕРЫ.

1) По данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 год по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января):

0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482
0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473

Статистические данные других стран и других лет дают примерно те же значения относительной частоты.

$\Rightarrow$ относительная частота рождения девочек колеблется около числа 0,482,

$\Rightarrow$ вероятность рождения девочки 0,48.

2) Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления герба.

Результаты нескольких опытов приведены в таблице:

Число бросаний	Число появлений герба	Относительная частота
4 040	2048	0,5069
12 000	6019	0,5016
24 000	12012	0,5005

$\Rightarrow$ относительные частоты незначительно отклоняются от 0,5.

Причем, чем больше число испытаний, тем меньше отклонение.

$\Rightarrow$ относительная частота колеблется около вероятности.

Замечание.

Из определения статистической вероятности получаем, что если P – вероятность события A, то величина $\mu = P \cdot n$ – среднее значение числа появления события A в n испытаниях.

ПРИМЕР. В результате ряда испытаний было обнаружено, что при 200 выстрелах стрелок поражает мишень в среднем 190 раз.

1) Какова вероятность поражения цели этим стрелком?
2) Сколько попаданий в цель можно ожидать при 1000 выстрелах?

4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Долгое время в теории вероятностей основные понятия не были четко определены. Это приводило к парадоксальным результатам, когда результат решения задачи зависел от метода решения (парадокс Бертрана).

$\Rightarrow$ необходимо было дать формально-логическое обоснование теории вероятностей, провести ее аксиоматическое построение.

Аксиоматическое построение теории предполагает, что в основу теории ложатся некоторые предложения (аксиомы), которые предполагаются за истинные и в пределах данной теории не доказываются.

Все остальные предложения теории должны выводиться из аксиом чисто логическим путем.

Впервые задача аксиоматического построения теории вероятностей была поставлена и решена в 1917 г. С.Н. Бернштейном.

Другой подход предложил А.Н. Колмогоров. В основе теории вероятностей у Колмогорова лежат следующие аксиомы:

Аксиома 1. Каждому случайному событию A ставится в соответствие некоторое неотрицательное число $P(A)$, которое называется его вероятностью.

Аксиома 2. Если Ω – достоверное событие, $\varnothing$ – невозможное событие, то $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Аксиома 3 (аксиома сложения). Если A_1, A_2, …, A_n – несовместные события, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) .$$

Из сформулированных аксиом выводятся, например, следующие утверждения:

1) Для любого события A справедливо: $0 \le P(A) \le 1$.

2) Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

3) Если $A = B$, то $P(A) = P(B)$.

4) Для любого события A справедливо: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5) Если A и B – совместные события, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) .$$