Раздел: Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Комбинаторика***

Лектор Рожкова С.В.

2021 г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

§1. Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами.

Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой ***комбинаторной конфигурацией***.

Будем называть:

1) всю подлежащая изучению совокупность объектов – ***генеральной совокупностью***;
2) объекты комбинаторной конфигурации – ***выборочной совокупностью*** или ***выборкой***.

На практике чаще представляет интерес не конкретный вид выборок, а количество выборок, которые можно сделать из генеральной совокупности.

Формулы для подсчета числа выборок являются следствиями двух правил комбинаторики: принципа умножения и принципа сложения.

Принцип умножения.

Пусть требуется последовательно выполнить k действий.

Если 1-е действие можно выполнить n_1 способами,

2-е действие – n_2 способами,

3-е действие – n_3 способами,

……………………………………

k-е действие – n_k способами,

то все k действия вместе (в указанном порядке) можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Принцип сложения.

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить n способами, а другое – k способами, то выполнить одно (любое) из этих действий можно $n + k$ способами.

Принцип сложения легко распространяется на любое конечное число действий.

Примеры комбинаторных конфигураций:

1) сочетания;

2) перестановки;

3) размещения.

Пусть генеральная совокупность $\mathscr{M}$ содержит n элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество множества $\mathscr{M}$, состоящее из k элементов, называется ***сочетанием***.

Элементы множества – неупорядоченные.

$\Rightarrow$ два различных сочетания по k элементов отличаются друг от друга составом входящих в них элементов.

Если выборка без возвращения, то число возможных сочетаний из n элементов по k равно биномиальному коэффициент C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Если выборка с возвращением, то число возможных сочетаний из n элементов по k обозначается $\overline{C}_n^k$ и равно биномиальному коэффициенту C_{n+k-1}^k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность из k элементов множества $\mathscr{M}$ называется ***размещением k элементов***.

Последовательность – упорядоченное множество.

$\Rightarrow$ два различных размещения различаются либо порядком следования элементов, либо их составом.

По правилу умножения получаем:

1) число размещений без повторений из n элементов по k (обозначается через A_n^k) вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!};$$

2) число размещений с повторениями из n элементов по k (обозначается $\overline{A}_n^k$) вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любое размещение элементов множества $\mathscr{M}$ называется ***перестановкой n элементов***.

$\Rightarrow$ две различных перестановки различаются только порядком следования элементов.

Число возможных перестановок обозначается P_n и по правилу умножения для него получаем формулу

$$P_n = n!$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть во множестве с n элементами есть j различных элементов, при этом

1-й элемент повторяется n_1 раз,

2-й элемент – n_2 раз,

…………………………

j-ый элемент – n_j раз,

причем выполняется условие $n_1 + n_2 + \ldots + n_j = n$. Перестановки из n элементов данного множества называются ***перестановками с повторениями*** из n элементов.

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P_n\,(n_1, n_2, \ldots, n_j)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_j) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_j!}.$$

ПРИМЕР 1. Сколькими способами можно выбрать 5 радиоламп из партии, содержащей 15 радиоламп.

ПРИМЕР 2. В группе 10 человек. Для участия в конкурсе необходимо выбрать 3 человека. Сколькими способами это можно сделать?

ПРИМЕР 3. Сколькими способами можно распределить первые три места на конкурсе, в котором участвует 10 человек?

ПРИМЕР 4. Сколькими способами группу из 6 человек можно усадить а) в ряд; б) за круглым столом.

§2. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Основные понятия теории вероятностей: эксперимент, событие, вероятность.

Эксперимент (опыт, испытание) – реализация комплекса условий, которые можно повторить.

Событие – результат эксперимента.

Договоримся события обозначать большими латинскими буквами.

Вероятность – количественная характеристика событий.

Классификация событий: 1) достоверные;
2) невозможные;
3) случайные.

Событие, которое неизбежно происходит при каждой реализации комплекса условий (эксперимента), называется ***достоверным***.

ПРИМЕР. Игральной костью будем называть однородный куб, на гранях которого нанесены цифры от 1 до 6.

Эксперимент – бросаем игральную кость 2 раза.

Событие: «сумма выпавших очков больше 1» – достоверное.

Если в результате эксперимента событие заведомо не может произойти, то оно называется ***невозможным***.

ПРИМЕР. Урной будем называть емкость, из которой мы можем извлекать предметы, по одному и только наугад (т.е. мы можем определить предмет только после того, как он извлечен из урны).

Пусть в урне находятся шары красного цвета.

Эксперимент: вытаскиваем из урны один шар.

Событие: «вытащенный шар – синего цвета» – невозможное.

Событие, которое при реализации комплекса условий может произойти, а может и не произойти, называется ***случайным***.

ПРИМЕР.

Эксперимент: бросаем монетку.

Событие: выпала решка. Событие случайное (возможно выпадение как решки, так и орла).

Каждый случайный исход эксперимента называют ***элементарным событием***.

Множество случайных исходов эксперимента (элементарных событий) называют ***пространством элементарных событий***.

Пространство элементарных событий будем обозначать Ω.

ПРИМЕРЫ.

1) Бросаем монетку.

Г – «выпал герб», Р – «выпала решка» – элементарные;

$\Omega = \{Г, Р\}$.

2) Бросаем монетку 2 раза.

$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

3) В урне 5 синих и 4 красных шара. Вынимаем 2 шара.

$\Omega = \{СС, СК, КС, КК\}$.

Событие A называется ***составным***, если его осуществление равносильно реализации нескольких элементарных событий.

Говорят: событие A состоит из n элементарных событий, событию A благоприятствуют n элементарных событий.

ПРИМЕР. Бросаем монетку 2 раза.

1) A – «Герб выпал один раз» – составное событие.

A = {ГР, РГ}.

2) B – «Первый раз выпал герб» – составное событие.

B = {ГГ, ГР}.

3) C – «Герб выпал хотя бы один раз»

C = {ГГ, ГР, РГ}.

На множестве случайных событий вводят отношения совместности, зависимости, следствия и эквивалентности.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других (в условиях данного эксперимента).

В противном случае события называются ***совместными***.

ПРИМЕРЫ.

1) Любые 2 элементарных события – несовместны.

2) Бросаем кость 2 раза.

A – «выпало не более 4 очков», B – «выпало не менее 10 очков»

$A = \{11, 12, 21, 13, 22, 31\}$, $B = \{55, 64, 46, 56, 65, 66\}$

3) Бросаем монетку 2 раза.

A – «герб выпал один раз», B – «герб выпал первый раз»

A, B – совместные (A = {ГР, РГ}, B = «ГГ, ГР»)

ВЫВОД: случайные события совместны, если они имеют в своем составе хотя бы одно общее элементарное событие.

Говорят, что несовместные события A_1, A_2, …, A_n образуют ***полную группу***, если в результате опыта обязательно произойдет одно из них.

В частности, если события A_1 и A_2 образуют полную группу, то они называются ***противоположными***.

Иначе говоря, события A_1 и A_2 противоположные, если в результате опыта обязательно произойдет одно из них

Событие, противоположное к A, обозначают $\overline{A}$.

Событие B называется ***следствием события*** A, если из появления события A следует появление события B.

ОБОЗНАЧАЮТ: $A \subset B$.

ПРИМЕР. Бросаем монетку 2 раза.

A – «Герб выпал первый раз»,

B – «Герб выпал не менее одного раза»

$A \subset B$

События A и B называются ***эквивалентными*** (равносильными, равными) если $A \subset B$ и $B \subset A$.

ОБОЗНАЧАЮТ: $A = B$.

Очевидно, что эквивалентные события состоят из одних и тех же элементарных событий.

§3. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера – Венна

На множестве событий вводятся следующие операции:

1) сложение событий;
2) умножение событий;
3) разность событий.

Суммой событий A и B называется событие A + В, состоящее в том, что произошло A или B.

ПРИМЕР.

Бросаем монетку 2 раза.

A – «Герб выпал первый раз», B – «Герб выпал один раз»

A = {ГГ, ГР}, В = {ГР, РГ}

$\Rightarrow$ A + В = {ГГ, ГР, РГ} – «Герб выпал не менее одного раза»

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$ (AB), состоящее в том, что одновременно произошло A и B.

ПРИМЕР. Бросаем монетку 2 раза.

A – «Герб выпал первый раз», B – «Герб выпал один раз»

$A = \{ГГ, ГР\}$, $B = \{ГР, РГ\}$

$\Rightarrow$ $A \cdot B = \{ГР\}$ – «первый раз выпал герб, второй – решка».

Очевидно, что если A и B несовместные, то их произведение – невозможное событие.

Разностью событий A и B называется событие $A \backslash B$ состоящее в том, что осуществляются события благоприятствующие A, но не благоприятствующие B.

ПРИМЕР. Бросаем монетку 2 раза.

A – «Герб выпал первый раз», B – «Герб выпал один раз»

$A = \{ГГ, ГР\}$, $B = \{ГР, РГ\}$

$A \backslash B = \{ГГ\}$ – «Герб выпал два раза».

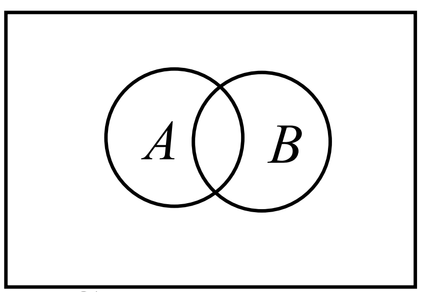
Для иллюстраций операций над событиями привлекают ***диаграммы Эйлера – Венна***.

Пространство элементарных исходов Ω изображается в виде некоторой области на плоскости (обычно прямоугольника).

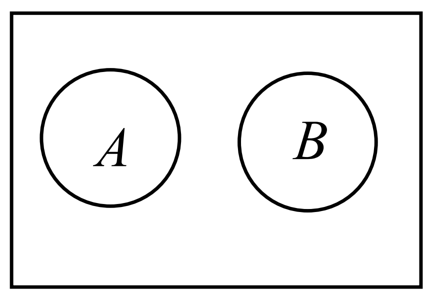
Каждое элементарное событие – точка этого прямоугольника.

$\Rightarrow$ Составное событие – область внутри прямоугольника (обычно – круг).

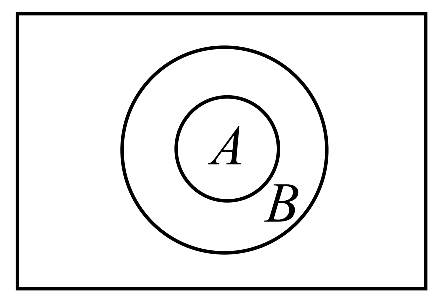
Тогда отношения на множестве событий изображаются следующими диаграммами:



Совместные события

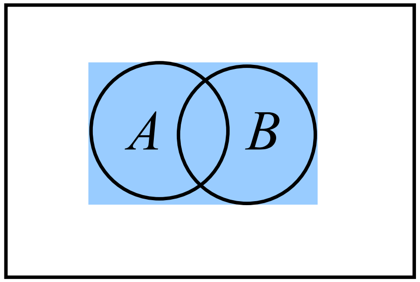


Несовместные события

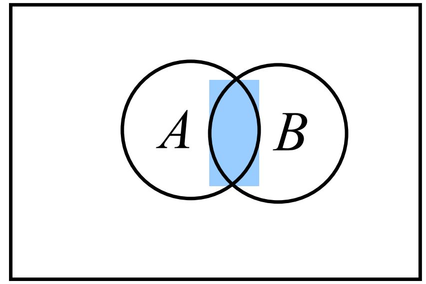


B следствие A

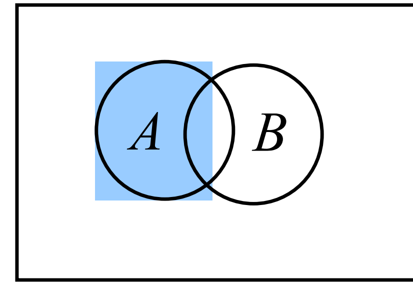
Операции над событиями изображаются следующими диаграммами:



$A + B$



AB



$A \backslash B$

Возможность использования диаграмм Эйлера – Венна позволяет утверждать, что операции над событиями подчиняются тем же законам, что и множества. А именно:

1) $A + A = A, \quad A \cdot A = A;$

2) $A + \Omega = \Omega, \quad A \cdot \Omega = A$ (где Ω – достоверное событие);

3) $A + \varnothing = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing$ (где $\varnothing$ – невозможное событие);

4) $A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A;$

5) $(A + B) + \mathrm{C} = A + (B + \mathrm{C}), \quad (A \cdot B) \cdot \mathrm{C} = A \cdot (B \cdot \mathrm{C});$

6) $(A + B) \cdot \mathrm{C} = A \cdot C + B \cdot \mathrm{C}, \quad A + B \cdot \mathrm{C} = (A + B) \cdot (A + \mathrm{C});$

7) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (законы де Моргана).