Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Интегралы, зависящие от параметра***

Лектор Рожкова С.В.

2020 г.

ТЕОРЕМА 3 (о дифференцировании интеграла по параметру).

Пусть функции $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x, y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}$ и $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$.

Тогда функция $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$, *причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'_y(x, y)dx \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***правилом Лейбница***.

ТЕОРЕМА 5 (о дифференцировании интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования).

Пусть функции $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\}$,

$\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *дифференцируемы на* $[c;d]$, *причем*

$$a \le \alpha(y) \le b\ ,\quad a \le \beta(y) \le b\ ,\quad \forall y \in [c;d]\ .$$

Тогда функция $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$, *причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y).$$

ПРИМЕР 1. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx$.

Имеем по формуле (5):

$$I'(y)=\int\limits_0^1 \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y dx=\int\limits_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}.\ \blacksquare$$

$$I'(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y\left(x,y\right)dx+\varphi'_2(y)\cdot f\left(\varphi_2(y),y\right)-\varphi'_1(y)\cdot f\left(\varphi_1(y),y\right).$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_{y}^{y^2} e^{yx^2}dx$.

По формуле (6) получаем

$$I'(y)=\int\limits_{y}^{y^2}(e^{yx^2})'_y\,dx+(y^2)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Bigg|_{x=y^2}-(y)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Bigg|_{x=y}=$$

$$=\int\limits_{y}^{y^2}x^2e^{yx^2}dx+2ye^{y^5}-e^{y^3}.\ ■$$

$$\frac{d}{dy}\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} f_y'(x,y)dx \ .$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру иногда позволяет значительно упростить процедуру вычисления определенных интегралов:

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $A = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, он носит название ***интегрального синуса***.

Для вычисления искомого интеграла A рассмотрим функцию

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \geq 0.$$

Тогда $A = I(0)$.

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$I'(t) = -\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx.$$

Этот интеграл легко вычисляется при $t > 0$:

$$I'(t) = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} \sin x\, de^{-tx} = \frac{1}{t}\left(\sin x\, e^{-tx}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\int_0^{\infty} \cos x\, de^{-tx} = \frac{1}{t^2}\left(\cos x\, e^{-tx}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x\, dx \right) = \frac{1}{t^2}(-1 - I'(t)).$$

Отсюда

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Интегрируя полученное соотношение, находим

$$I(t) = -\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\operatorname{arctg} t + C.$$

Постоянную интегрирования C можно определить из условия $I(+\infty) = 0$:

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t$. По свойству 1 функция $I(t)$ непрерывна, поэтому искомый интеграл может быть найден в результате предельного перехода:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = I(0) = \lim_{t \to 0} I(t) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) = \frac{\pi}{2}. \ \blacksquare$$

Пример Найти $I'(y)$, если $I(y)=\int\limits_{y}^{1+y}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

Решение. Здесь все условия теоремы 8 выполнены. Тогда по формуле дифференцирования

$$I'(y)=\int\limits_{y}^{1+y}\frac{y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\cdot\sqrt{(1+y)^2+y^2}-1\sqrt{y^2+y^2},$$

при $f'_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, а $\alpha'(y)=1$, $\beta'(y)=1$, $\alpha(y)=y$, $\beta(y)=1+y$.

Пример Вычислить производные функций

$$I_1(y)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx,\ I_2(y)=\int_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx.$$

Решение. При $y>0$

$$I_1'(y)=-\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2},\ I_2'(y)=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

по формуле Лейбница.

Посмотрим, как обстоит дело при $y=0$. Если положить $I_1(0)=\frac{\pi}{2}$, сохранится непрерывность $I_1(y)$ при $y=0$. Но, вычисляя непосредственно, имеем $\frac{I_1(y)-I_1(0)}{y}=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}-\frac{\operatorname{arctg} y}{y}\to-\infty$ при $y\to 0$. Так что конечной производной при $y=0$ не существует.

Аналогично рассмотрим

$$I_2(0)=-2,\ \frac{I_2(y)-I_2(0)}{y}=\frac{\ln(1+y^2)}{y}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\to\pi \text{ при } y\to 0.$$

Между тем производная подынтегральной функции при $y=0$ равна нулю, так что и интеграл равен нулю.

Правило Лейбница при $y=0$ в этих примерах не приложимо.