Математический анализ
Раздел: Неопределенный интеграл

Тема: ***Интегрирование рациональных дробей***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§25. Интегрирование рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рациональной дробью*** *называется отношение 2-х многочленов*, т.е. функция вида $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$,

где $P_\mathrm{m}(x)$, $P_\mathrm{n}(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется ***правильной***. В противном случае (т.е. если $m \geq n$) дробь называется ***неправильной***.

Неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)},$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен степени $m - n$,

$P_\mathrm{r}(x)$ – многочлен степени $r < n$.

(многочлены $Q(x)$ и $P_\mathrm{r}(x)$ получаются в результате деления с остатком $P_\mathrm{m}(x)$ на $P_\mathrm{n}(x)$)

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Простейшими рациональными дробями*** I, II, III, IV *типа называются соответственно правильные дроби вида*

$$\frac{A}{x+a}, \quad \frac{A}{(x+a)^m}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m},$$

где $D = b^2 - 4c < 0$, m *– натуральное число* $(m > 1)$.

1) Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\int \frac{dx}{x+a} = A\int \frac{d(x+a)}{x+a} = A\ln|x+a| + C.$$

2) Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m}dx = A\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^m} = A\frac{(x+a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

3) Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$D=b^2-4c<0$$

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$(x^2+bx)+c=\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c,$$

$$-\frac{b^2}{4}+c=\frac{-b^2+4c}{4}=-\frac{D}{4}>0,$$

$$\Rightarrow\quad x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t = x + \dfrac{b}{2}$.

В результате интеграл будет приведен к виду $\displaystyle\int \frac{At + M}{t^2 + q^2}\,dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int \frac{At + M}{t^2 + q^2}\,dt = \int \frac{At}{t^2 + q^2}\,dt + \int \frac{M}{t^2 + q^2}\,dt.$$

В первом – внесем под знак дифференциала знаменатель,

$$\int \frac{At}{t^2 + q^2}\,dt = A\int \frac{t}{t^2 + q^2} \cdot \frac{d(t^2 + q^2)}{2t} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2 + q^2) + C;$$

Второй интеграл – табличный:

$$\int \frac{M}{t^2 + q^2}\,dt = \frac{M}{q}\operatorname{arctg}\frac{t}{q} + C.$$

г) Вернемся к исходной переменной x.

4) Интегрирование простейших дробей IV типа:

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+bx+c=(x+b/2)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t=x+b/2$

В результате интеграл будет приведен к виду $\int \frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int \frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt = A\int \frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}+M\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^m}.$$

Первый из этих интегралов найдем, внеся t^2+q^2 под знак дифференциала:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}=\int \frac{t}{(t^2+q^2)^m}\cdot\frac{d(t^2+q^2)}{2t}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q^2)}{(t^2+q^2)^m}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+q^2)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

Для интеграла $J_m = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^m}$ справедлива рекуррентная формула:

$$J_m = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{2(1-m)} \cdot \frac{t}{(t^2+q^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2q^2(1-m)} J_{m-1}, \quad (1)$$

где $J_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{m-1}}$.

Применив формулу (1) последовательно $(m - 1)$ интеграл J_m сведется к табличному интегралу

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C$$

г) Вернемся к исходной переменной x.

2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть $\dfrac{P_r(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Запишем $P_{\text{n}}(x)$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_i)^{k_i} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0, \quad j = 1,2,\ldots,s$

ТЕОРЕМА 1.

Любая правильная рациональная дробь единственным образом представима в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении (2) *имеет место следующее соответствие:*

1) *каждому множителю вида* $(x-a)^k$ *соответствует сумма из* k *простейших дробей вида*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– некоторые числа;*

2) *каждому множителю вида* $(x^2+bx+c)^t$ *соответствует сумма из* t *простейших дробей вида*

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+bx+c)^t}$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_t, C_1, C_2, \ldots, C_t$ *– некоторые числа.*

ПРИМЕРЫ.

1) $$\frac{x^3+2x-1}{(x-2)\cdot(x+1)^3}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4}{(x+1)^3};$$

2) $$\frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)}=\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2};$$

3) $$\frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2};$$

4) $$\frac{x^4+1}{(x+2)(x^2+x+3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+3)^2}.$$

Разложение конкретной правильной рациональной дроби в сумму простейших обычно производят ***методом неопределенных коэффициентов***, который представляет собой следующую последовательность действий:

1) записываем знаменатель $P_n(x)$ в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей;
2) записываем разложение дроби в сумму простейших с неопределенными коэффициентами в числителях (по теореме 1);
3) складываем простейшие дроби и приравниваем многочлен $Q_r(x)$, получившийся в числителе, числителю исходной дроби $P_r(x)$;
4) из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов $Q_r(x)$ и $P_r(x)$, получим систему r линейных уравнений для нахождения r неизвестных коэффициентов.

Замечание.

1) Систему для нахождения неизвестных коэффициентов можно получить из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ и другим способом.

   А именно, придавая x r конкретных значений, получим из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ r уравнений, связывающие неизвестные коэффициенты.

   Такой метод получения системы уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов называется ***методом частных значений***.

2) Разлагать правильную рациональную дробь в сумму простейших **не следует**, если есть более простой способ найти интеграл.

   Например, в интеграле $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

   лучше внести под знак дифференциала знаменатель.

   В интеграле $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

   лучше предварительно сделать замену переменной $x^2 = t$.