Математический анализ
Раздел: Неопределенный интеграл

Тема: ***Первообразная функция и неопределенный интеграл. Методы интегрирования***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

ГЛАВА IV. Неопределенный интеграл

Интегральное исчисление – раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ним процессов интегрирования.

Интегральное исчисление тесно связано с дифференциальным исчислением и составляет вместе с ним одну из основных частей математического анализа.

§23. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции $f(x)$ найти $f'(x)$.

Обратная задача: известна $f'(x)$, требуется найти $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$ определены на $X \subseteq \mathbb{R}$.*
Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на X и $\forall x \in X$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x) .$$

ПРИМЕРЫ.

1) $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, т.к.

$$(\sin x)' = \cos x , \ \forall x \in \mathbb{R};$$

2) $F(x) = \ln|\, x \,|$ – первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем точки $x = 0$, т.к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

ВОПРОСЫ:
1) для любой ли функции существует первообразная;
2) если функция имеет первообразную, то будет ли она единственной?

ТЕОРЕМА 1 (о связи первообразных).

Пусть $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на* X.

Функция $\Phi(x)$ *будет первообразной для* $f(x)$ *на* X $\Leftrightarrow$ *функции* $\Phi(x)$ *и* $F(x)$ *на* X *связаны равенством*

$$\Phi(x) = F(x) + \mathrm{C},$$

где C *– некоторое число*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(x)$ *и обозначают символом*

$$\int f(x)dx$$

Называют:

$f(x)$ – подинтегральная функция,

$f(x)dx$ – подинтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

символ $\int$ – знак интеграла.

По определению и теореме 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием функции*** $f(x)$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке первообразную.

Замечание.

Производная от элементарной функции всегда является функцией элементарной.

Первообразная от элементарной функции может не быть функцией элементарной.

Интегралы от таких функций называются ***неберущимися***.

Неберущимися являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Замечание.

Неопределенный интеграл – множество функций. Свойство 1 утверждает, что производная каждой из них равна $f(x)$.

$\Rightarrow$ правильность интегрирования всегда можно проверить: достаточно продифференцировать результат. При этом должна получиться подинтегральная функция.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Замечание.

Имеем: $F'(x) \cdot dx = dF(x)$.

$\Rightarrow$ Подинтегральное выражение является реальным произведением – дифференциалом первообразной функции $F(x)$.

$\Rightarrow$ свойство 2 можно записать в виде

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4. Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

§24. Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Суть метода: с помощью простых преобразований (выполнение каких-либо арифметических действий, применение стандартных формул алгебра и геометрии и т.д.) подинтегральная функция записывается в виде суммы функций, первообразные для которых известны (говорят: «записывается в виде суммы табличных интегралов»).

ПРИМЕР. Найти интегралы

$$a)\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2dx, \qquad b)\int\frac{x^2+x+\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x}}dx$$

2. Замена переменной (метод подстановки)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция $y = f(x)$ называется* ***непрерывно дифференцируемой*** *на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $f(x)$ дифференцируема на X, причем ее производная $f'(x)$ – непрерывна на X.*

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной под знаком интеграла).

Пусть $\varphi: T \to X$ и $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируема на T,

$f: X \to Y$ и $y = f(x)$ *непрерывна на X.*

Тогда функции $f(x)$ и *$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегрируемы на X и T соответственно, причем, если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Найти интеграл $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

3. Внесение функции под знак дифференциала – частный случай подстановки

СЛЕДСТВИЕ 4 теоремы 3 (об инвариантности формул интегрирования).

Любая формула интегрирования остается справедливой, если везде заменить переменную на непрерывно дифференцируемую функцию, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ *– любая непрерывно дифференцируемая функция*

Например, так как $\int \cos x dx = \sin x + C,$

то

$$\int \cos(x^2+1)d(x^2+1) = \sin(x^2+1) + C,$$

$$\int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x + C$$

4. Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 5.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Тогда на* X *существуют интегралы*

$$\int u dv \qquad \text{и} \qquad \int v du$$

и справедливо равенство

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1}$$

Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

***Замечания*.**

1) при нахождении интеграла формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз, постепенно «улучшая» остающийся интеграл;
2) формула интегрирования по частям – единственная возможность найти интегралы вида
$$\int P_n(x)\cdot\varphi(x)dx,$$
где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $\varphi(x)$ – показательная, логарифмическая, тригонометрическая или обратная тригонометрическая функция;
3) с помощью формулы интегрирования по частям находятся также циклические интегралы:
$$\int a^{\alpha x}\cdot\cos\beta x dx,\quad \int a^{\alpha x}\cdot\sin\beta x dx.$$

ПРИМЕР. Найти интегралы
$$a)\ \int x^2\sin x dx \qquad b)\ \int e^x\cos x dx$$