Математический анализ

Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: ***Формула Тейлора для ФНП. Экстремумы ФНП***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§18. Формула Тейлора для ФНП

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то справедлива формула (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n(x - x_0)^n,$$

где $\beta_n(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Формулу (3) называют ***формулой Тейлора разложения функции f(x) по степеням (x – x_0)*** (***в окрестности точки x_0***).

Сумму

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют ***многочленом Тейлора функции f(x) по степеням (x – x_0).***

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ ***называют остаточным членом формулы Тейлора***.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – ***форма Пеано***;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то R_n можно записать в ***форме Лагранжа*** **:**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x .

Если c – точка между x_0 и x , то $\exists\theta\in(0;\ 1)$ такое, что

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \text{ где } \Delta x = x - x_0.$$

$\Rightarrow$ Остаточный член в форме Лагранжа примет вид:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!} \cdot \Delta x^{n+1}.$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют ***формулой Маклорена***.

Заметим, что

$$f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n = d^n f(x_0).$$

Следовательно, формулу (3) можно записать в виде (5):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Формулу (5) можно обобщить на случай ФНП.

Пусть $z = f(x,y)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$, справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$,

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

(или $R_{\text{n}} = o(\rho^n)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$) .

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$** (**по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$**).

Сумму

$$f(M_0)+\frac{df(M_0)}{1!}+\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(M_0)}{n!}$$

называют ***многочленом Тейлора функции*** ***$f(x,y)$ в окрестности точки*** ***$M_0(x_0,y_0)$.***

Слагаемое R_n называют ***остаточным членом формулы Тейлора функции*** ***$f(x,y)$ в окрестности точки*** ***$M_0(x_0,y_0)$*** в форме Лагранжа (Пеано).

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных

§19. Понятие квадратичной формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Многочлен n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в *котором все члены имеют одинаковую степень, называется* ***однородным*** или ***формой***.

ПРИМЕРЫ.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$
– однородный 1-й степени (линейная форма);

2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$
– однородный 2-й степени (***квадратичная форма***);

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 4x_2^3$
– однородный 3-й степени.

Общий вид квадратичной формы:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2} + \ldots + a_{nn}x_n^{\,2} + \\
& + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\
& + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\
& + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n .
\end{aligned}
$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Тогда квадратичную форму можно записать в виде

$$
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j
$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратичная форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***положительно*** (***отрицательно***) *определенной если*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0]$$

для любых, не равных одновременно нулю, значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***знакоопределенными***.

Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется ***неопределенной***.

Симметрическая матрица из коэффициентов квадратичной формы, т.е. матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Главными угловыми минорами квадратной матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ называются ее миноры вида

$$c_{11}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \qquad \text{и т.д.}$$

ТЕОРЕМА 1 (критерий Сильвестра).

1) *Квадратичная форма положительно определена* $\Leftrightarrow$ *все главные угловые миноры ее матрицы – положительные*.

2) *Квадратичная форма отрицательно определена* $\Leftrightarrow$ *знаки главных угловых миноров ее матрицы чередуются*, *начиная с минуса*, т.е.

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \qquad \text{и т.д.}$$

§20. Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$, $M_0(x_0,y_0) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) .$$

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) .$$

Точки максимума и минимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно ***максимумами*** и ***минимумами*** (***экстремумами***) этой функции.

Замечания.

1) По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D.

2) Если $\forall M(x,y) \in U^*(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad [\ f(x,y) > f(x_0,y_0)\ ],$$

то точку M_0 называют ***точкой строгого максимума*** (соответственно ***точкой строгого минимума***) функции $f(x,y)$.

Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками ***нестрогого максимума*** и ***минимума***.

3) Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1.

Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x,y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ либо параллельна плоскости xOy, либо вообще не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Точки, в которых обе частные производные первого порядка функции $z = f(x,y)$ равны нулю, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x,y)$.

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x,y)$.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0,y_0) \in D$.

Пусть $z = f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности U точки M_0 и M_0 – критическая точка для $z = f(x,y)$. Тогда

1) $\forall M \in U$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2 ,$$

где $R_2 = o(\rho^2)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0;$

2) $f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad df(M_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(M) = f(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2 ,$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(M_0) \approx \frac{d^2 f(M_0)}{2!} ,$$

Получили, что знак $\Delta f(M_0)$ и $d^2 f(M_0)$ совпадает.

Следовательно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия экстремума функции n переменных).

Пусть M_0 – *<u>стационарная</u> точка функции* $z = f(M)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция* $f(M)$ *имеет непрерывные частные производные 2-го порядка.*

Тогда

1) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *максимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *отрицательно определена* ;
2) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *минимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *положительно определена* ;
3) *если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *является неопределенной, то* M_0 *не является точкой экстремума*;
4) *если* $d^2f(M_0) \geq 0$ *или* $d^2f(M_0) \leq 0$ (т.е. среди главных угловых миноров имеются нулевые), *то никакого заключения о критической точке* M_0 *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Если $z = f(x,y)$, то $d^2f(M_0)$ – квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

Тогда:

1) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена если

$$f''_{xx}(M_0) < 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0;$$

2) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена если

$$f''_{xx}(M_0) > 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума функции ДВУХ переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – *критическая точка функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.*

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

1) *если* $A \cdot C - B^2 < 0$, *то точка* $M_0(x_0,y_0)$ *не является точкой экстремума;*
2) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет минимум;*
3) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A < 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет максимум;*
4) *если* $A \cdot C - B^2 = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Замечание.

Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0,y_0)$ не удалось, то ответ на вопрос о наличии в M_0 экстремума даст знак $\Delta f(x_0,y_0)$:

а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) < 0,$$
то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого максимума;

б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем
$$\Delta f(x_0,y_0) > 0,$$
то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого минимума.

В случае нестрогих экстремумов при <u>некоторых</u> значениях Δx и Δy приращение функции будет нулевым