Математический анализ

Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: ***Дифференцируемость ФНП*** **(окончание).**
Частные производные и дифференциалы сложных ФНП.
Дифференцирование неявных функций

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

3. Дифференциалы высших порядков ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в области $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.
Ее дифференциал $dz(M)$ – функция переменных x, y, dx, dy.
Далее будем $dz(M)$ называть ***дифференциалом 1-го порядка***.

Зафиксируем значение dx и dy.
Тогда $dz(M)$ станет функцией двух переменных x и y.

Дифференциал функции $dz(M)$ (если он существует) называется ***дифференциалом 2-го порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***вторым дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^2z, $d^2f(x,y)$.

$d^2z(M)$ – функция переменной x и y.
Дифференциал функции $d^2z(M)$ (если он существует) называют ***дифференциалом третьего порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***третьим дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^3z, $d^3f(x,y)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $z = f(x,y)$*** как дифференциал от ее дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: d^nz, $d^nf(x,y)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) обозначают $d^nz(M_0)$, $d^nf(x_0,y_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция $z = f(x,y)$ имеет дифференциал порядка n, то ее называют ***n раз дифференцируемой***.

ТЕОРЕМА 3 (о связи дифференциала n-го порядка и n-х частных производных).

Если все производные k-го порядка функции $z = f(x,y)$ в области D непрерывны, то она k раз дифференцируема.

При этом имеет место <u>символическая</u> формула

$$d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x,y). \qquad (6)$$

Замечание.

1) Чтобы записать дифференциал по формуле (6) необходимо:

а) формально раскрыть скобку по биномиальному закону,

б) умножить получившееся выражение на $f(x,y)$,

в) заменить каждое произведение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} \cdot f(x, y)$$

частной производной $\quad \dfrac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$

Например, для $n = 2$ получим:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

Для $n = 3$ получим:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

2) Символическая формула для нахождения дифференциала $d^k u$ функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ будет иметь вид

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что $x_1, x_2, \ldots x_n$ – независимые аргументы.

§16. Частные производные сложных ФНП. Дифференциалы сложных ФНП

1. Частные производные сложной функции

Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Тогда z – ***сложная функция*** независимых переменных u и v.
Переменные x и y называются для z ***промежуточными переменными***.

ЗАДАЧА: найти частные производные функции z по u и v.

ТЕОРЕМА 1 (о производной сложной функции).
Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Если $f(x,y)$, $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ дифференцируемы, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (1)$$

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай функции большего числа независимых и промежуточных аргументов. А именно, если

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{где } x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \qquad (\forall k = \overline{1, m})$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ сложной ФНП

1) Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.
Тогда z – сложная функцией одной переменной t.
Если $f(x,y)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

2) Пусть $z = f(x,y)$, где $y = \varphi(x)$
Тогда z – сложная функцией одной переменной x.
Если $f(x,y)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Производная $\dfrac{dz}{dx}$ в левой части формулы (3) называется ***полной производной функции z***.

2. Дифференциал сложной функции

Пусть $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция 2-х **независимых** переменных.

Тогда, по определению

$$dz = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y \qquad (4)$$

или, в другом виде,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (5)$$

Формула (5) остается верна и в том случае, если $z = f(x,y)$ – сложная функция.

Формула (5) записи полного дифференциала называется ***инвариантной***.

УПРАЖНЕНИЕ 1.

Показать, что формула (4) неверна, если x и y – функции.

Пусть $z = f(x,y)$ – n раз дифференцируемая функция 2-х **независимых** переменных.

Тогда $\forall k \le n$

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y) \qquad (6)$$

Формула (6) тоже не является инвариантной.

УПРАЖНЕНИЕ 2.

Найти дифференциал 2-го порядка если $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.

§17. Дифференцирование неявных функций

ТЕОРЕМА 1 (существования неявной функции).

Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *и все ее частные производные 1-го порядка определены и непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, u_0)$.

Если $F(P_0) = 0$ *и* $F'_u(P_0) \neq 0$,

то $\exists$ *такая окрестность* U *точки* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, *в которой уравнение*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

определяет непрерывную функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *причем*

1) $f(M_0) = u_0$;

2) *для любой точки* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{U}$

$$F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \neq 0;$$

3) *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в окрестности* U *непрерывные частные производные по всем аргументам.*

ЗАДАЧА. Найти частные производные неявно заданной функции.

1) Пусть $F(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в некоторой окрестности $P_0(x_0,y_0)$

Тогда уравнение $F(x,y) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки x_0, непрерывную функцию $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (1)$$

2) Пусть $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в окрестности $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Тогда уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывную функцию $z = f(x,y)$.

Так как фактически $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной при постоянном значении другой, то по формуле (1) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$