

Математический анализ

Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: *Дифференциал функции.
Производные и дифференциалы порядка n*

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§6. Дифференциал функции

1. Определение и геометрический смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке x_0** , если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно Δx части и бесконечно малой более высокого порядка чем Δx , т.е.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x), \quad (1)$$

где A – число, $\beta(\Delta x)$ – б.м. более высокого порядка чем Δx .

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ в выражении (1) (т.е. линейную относительно Δx часть $\Delta f(x_0)$) называют **дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают: $dy(x_0)$, $df(x_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ она имеет в точке x_0 производную. При этом для ее дифференциала в точке x_0 справедливо равенство

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x . \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Очевидно, что соответствие $(x_0; \Delta x) \rightarrow df(x_0)$ является функцией (двух переменных).

Ее называют **дифференциалом функции $y = f(x)$** и обозначают

$$dy, df(x) .$$

Замечание. Из теоремы 1 следует, что нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют **дифференцированием функции**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой на интервале $(a;b)$** если она дифференцируема (т.е. имеет производную) в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой на отрезке $[a;b]$** если она дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет соответствующие односторонние производные в точках a и b .

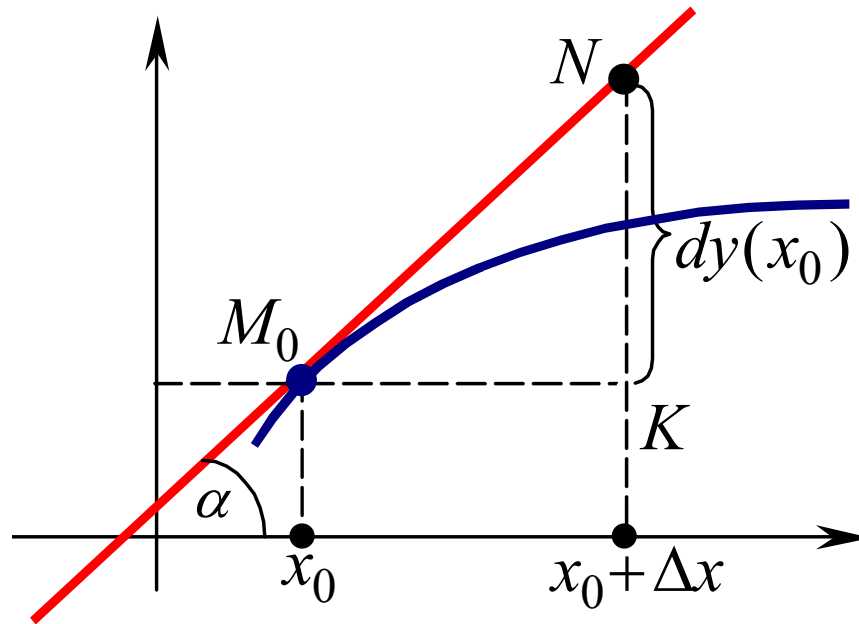
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

Тогда в x_0 функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$.

\Rightarrow в точке $M_0(x_0 ; f(x_0)) \exists$ касательная к кривой $y = f(x)$.



Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты точки на касательной к кривой $y = f(x)$, которое соответствует приращению Δx .

ПРИМЕРЫ.

Найти дифференциалы функций: 1) $y = x^3$; 2) $y = x$.

Замечания.

1) Так как для дифференциала функции $y = x$ справедливо

$$dy = dx = \Delta x ,$$

то говорят: «дифференциал независимой переменной равен ее приращению».

Учитывая этот факт, формулу (2) можно переписать в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx . \quad (3)$$

2) Из формулы (3) получаем, что производная $y' = f'(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

Таким образом, символическая дробь $\frac{dy}{dx}$ превратилась в реальную дробь.

2. Свойства дифференциалов

Из теоремы 1 и правил дифференцирования получаем, что справедливы следующие утверждения

1) Дифференциал константы равна нулю, т.е.

$$d(C) = 0, \text{ где } C - \text{константа.}$$

2) Дифференциал суммы (разности) равна сумме (разности) дифференциалов, т.е. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3) Дифференциал произведения находится по правилу:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

4) $d(C \cdot u) = C \cdot du$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак дифференциала».

5) Дифференциал дроби находится по правилу:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(\varphi(t))$.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t ,
функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$.

Тогда \exists производные $x'(t)$ и $f'(x)$ и сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t , причем

$$y'(t) = [f(\varphi(t))]' = f'(x) \cdot x'(t)$$

Следовательно, функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t и ее дифференциал в этой точке равен

$$dy(t) = y'(t) \cdot dt,$$

$$\Rightarrow dy(t) = f'(x) \cdot x'(t)dt,$$

$$\Rightarrow dy(t) = f'(x) \cdot \underbrace{x'(t)dt}_{dx},$$

$$\Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx. \quad (4)$$

Сравним формулы (3) и (4):

(3): $dy = f'(x) \cdot dx$, где x – независимая переменная;

(4): $dy = f'(x) \cdot dx$, где $x = \varphi(t)$ – функция.

Таким образом, формула (3) справедлива вне зависимости от того, является ли x независимым аргументом или функцией.

Поэтому формулу (3) называют **инвариантной формой записи дифференциала**.

Замечание. Формула

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (2)$$

не является инвариантной.

Действительно, для сложной функции $y = f(\varphi(t))$ имеем:

$$dy(t) = y'(t) \cdot \Delta t = f'(x) \cdot x'(t) \cdot \Delta t.$$

Но $x'(t) \cdot \Delta t \neq \Delta x$, т.к.

$$\Delta x = dx + \beta(\Delta t) = x'(t) \cdot \Delta t + \beta(\Delta t).$$

§7. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$. Тогда на X_1 определена $f'(x)$.

Функцию $f'(x)$ называют также **первой производной функции $f(x)$** (или **производной первого порядка функции $f(x)$**).

Если $f'(x)$ дифференцируема на некотором множестве $X_2 \subseteq X_1$, то $(f'(x))'$ называют **второй производной функции $y = f(x)$** (или **производной второго порядка функции $f(x)$**) и обозначают

$$y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Замечание. Значение второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают

$$y''(x_0), \quad \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \quad f''(x_0), \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Если $f''(x)$ тоже дифференцируема на некотором множестве $X_3 \subseteq X_2$, то ее производную $(f''(x))'$ называют **третьей производной функции $y = f(x)$** (или **производной третьего порядка функции $f(x)$**).

Продолжая этот процесс, назовем **n -й производной функции $y = f(x)$** ее производную от производной порядка $n - 1$.

Обозначают:

y''' , $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $f'''(x)$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$ – третья производная $y = f(x)$;

$y^{(4)}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$, $f^{(4)}(x)$, $\frac{d^4 f}{dx^4}$ – четвертая производная $y = f(x)$;

$y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ – n -я производная $y = f(x)$.

Производные порядка $n > 1$ называют ***производными высших порядков***.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ второй производной.

Если $S = S(t)$ – расстояние, пройденное точкой за время t ,
то $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени t_0* ,
 $S''(t_0)$ – *ускорение в момент времени t_0* (скорость изменения скорости)

Справедливы следующие утверждения.

1) $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак n -й производной».

2) Производная n -го порядка суммы (разности) функций равна сумме (разности) n -х производных слагаемых, т.е.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} .$$

3) n -я производная произведения находится по формуле:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \quad (1)$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Формула (1) называется **формулой Лейбница**.

2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$.

Дифференциал $dy = f'(x) \cdot dx$ – функция двух переменных x и $dx = \Delta x$.

Зафиксируем значение dx .

Тогда dy станет функцией одной переменной x .

Дифференциал функции $dy(x)$ (если он существует) называется **дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$** (или **вторым дифференциалом функции $y = f(x)$**) и обозначается $d^2y, d^2f(x)$.

d^2y – функция переменной x .

Дифференциал функции d^2y (если он существует) называют **дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$** (или **третьим дифференциалом функции $y = f(x)$**) и обозначается $d^3y, d^3f(x)$.

Продолжая далее этот процесс, определим **дифференциал n -го порядка функции $y = f(x)$** как дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: $d^n y$, $d^n f(x)$.

Замечание. Значение дифференциала n -го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $d^n y(x_0)$, $d^n f(x_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют **дифференциалами высших порядков**.

Если функция имеет дифференциал порядка n , то ее называют **n раз дифференцируемой**.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференциала n -го порядка и n -й производной).

Функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ она имеет в точке x_0 производную порядка n . При этом для $d^n y(x_0)$ справедливо равенство

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n . \quad (2)$$

Замечания.

- 1) Скобки в правой части формулы (2) обычно опускают, т.е. записывают ее в виде:

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n. \quad (3)$$

- 2) Из формулы (3) получаем, что n -я производная $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Таким образом, символическая дробь $\frac{d^{(n)} y}{dx^n}$ превратилась в реальную дробь.

- 3) Дифференциалы порядка n ($n > 1$) не обладают свойством инвариантности. Т.е. формула (3) не будет верной, если x — функция.