Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Непрерывность функции*

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§4. Непрерывность функции

1. Основные определения

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке x_0*** *если справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Замечания.

1) В силу теоремы 5 §3 равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Условие (2) – *определение непрерывности функции в точке на языке односторонних пределов*.

2) Равенство (1) можно также записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Говорят: «если функция непрерывна в точке x_0 , то знак предела и функцию можно поменять местами».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке ε-δ).

Функция $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\mathbf{x_0}$ *если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ *такое, что*

если $x\in U(x_0, \delta)$ (т.е. $|x - x_0| < \delta$),

то $f(x)\in U(f(x_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

Пусть $x, x_0 \in D(f)$ (x_0 – фиксированная, x – произвольная)

Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ – ***приращение аргумента***

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – ***приращение функции в точке*** $\mathbf{x_0}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (геометрическое).

Функция $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\mathbf{x_0}$ *если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0\,;\,x_0+\delta)$ (на промежутке $(x_0-\delta;\,x_0]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке x_0 справа*** (***слева***), *если справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\right)$$

Очевидно, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной на интервал***е **(*a*; *b*)** *если она непрерывна в каждой точке этого интервала.*

Функция $f(x)$ ***называется непрерывной на отрезке* [*a*; *b*]** *если она непрерывна на интервале* $(a;\ b)$ *и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках* (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева).

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $X = \{x_0\}$ или $X = (a; b)$ или $X = [a; b]$.

1) *Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X.*

2) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X и $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$, то частное $f(x)/g(x)$ – непрерывная на множестве X функция.*

3) *Пусть $f\colon X \to Y$, $\varphi\colon Y \to Z$. Если $f(x)$ непрерывна на X, $\varphi(x)$ – непрерывна на Y, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна на X.*

Свойства 1, 2, 3, следуют из свойств пределов функций.

4) *Основные элементарные функции непрерывны всюду в своей области определения*.

Если функция непрерывна всюду в области определения, то ее называют ***непрерывной***.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите по определению, что функции $\sin x$ и e^x непрерывны.

Подсказка. Используйте определение непрерывности на языке ε-δ или геометрическое.

5) *Элементарные функции непрерывны*

(следствие свойств 1– 4)

2. Точки разрыва и их классификация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в этой точке, то* ***$f(x)$ называют разрывной в точке x_0****, а саму точку* ***x_0 называют точкой разрыва*** *функции $f(x)$.*

Замечания.

1) $f(x)$ может быть определена в неполной окрестности точки x_0. Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции.

2) Из определения $\Rightarrow$ точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ в двух случаях:

а) $U(x_0, \delta) \in D(f)$, но для $f(x)$ не выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

б) $U^*(x_0, \delta) \in D(f)$.

Для элементарных функций возможен только случай б).

Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва* I *рода*** *если функция* $f(x)$ *имеет в этой точке конечные пределы слева и справа.*

Если при этом эти пределы равны, то точка x_0 *называется* ***точкой устранимого разрыва****, в противном случае –* ***точкой скачка****.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва* II *рода*** *если хотя бы один из односторонних пределов функции* $f(x)$ *в этой точке равен* ∞ *или не существует.*

3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

ТЕОРЕМА 1 (Вейерштрасса).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$. *Тогда*

1) $f(x)$ – *ограничена на* $[a; b]$;
2) $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *свое наибольшее и наименьшее значения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Значение функции $m = f(x_1)$ *называется* ***наименьшим***, *если* $m \leq f(x), \ \forall x \in D(f)$.

Значение функции $M = f(x_2)$ *называется* ***наибольшим***, *если* $M \geq f(x), \ \forall x \in D(f)$.

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

ТЕОРЕМА 2 (Коши, о промежуточных значениях).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и* γ *– число, заключенное между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$ *такая, что*

$$f(x_0) = \gamma .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Коши).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и на его концах принимает значения разных знаков, то на* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорем Коши и Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *то множеством ее значений является отрезок* $[m; M]$, *где* m *и* M *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$.