

# Математический анализ

## Раздел: Введение в анализ

---

Тема: *Предел функции*

(предел функции и его свойства, бесконечно большие функции и их свойства)

---

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

## §3. Предел функции

### 1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$  – **проколота окрестность точки**  $x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ).

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $x_0$**  (пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  
если  $x \in U^*(x_0, \delta)$ , то  $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ .

## *Замечание.*

1) Условие  $x \in U^*(x_0, \delta)$  означает, что для  $x$  выполняется неравенство:

а)  $0 < |x - x_0| < \delta$ , если  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

б)  $|x| > 1/\delta$ , если  $x_0 = \infty$ ;

в)  $x > 1/\delta$ , если  $x_0 = +\infty$ ;

г)  $x < -1/\delta$ , если  $x_0 = -\infty$ .

2) Условие  $f(x) \in U(A, \varepsilon)$  означает, что для  $f(x)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $x_0$** , если для любой последовательности  $\{x_n\}$  значений аргумента, стремящейся к  $x_0$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $A$ .

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Обозначают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $f(x) \rightarrow A$ , при  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $A$  при  $x$  стремящемся к  $x_0$ ».

## 2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

- 1) Если функция имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то он единственный.
- 2) Если  $f(x) \rightarrow A$ , то  $|f(x)| \rightarrow |A|$ .
- 3) Если функция  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  (говорят: ***функция локально ограничена***)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число  $A \in \mathbb{R}$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \iff f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Пусть  $f(x)$  – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ ,  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда  $f(x) \cdot \alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

6) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют предел при  $x \rightarrow x_0$ .

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

Следствие свойства 6. Если  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то

$\forall c \in \mathbb{R}$  функция  $c \cdot f(x)$  тоже имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

**Замечание.** Свойство 6 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

7) Пусть  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \geq 0$  (или  $f(x) > 0$ ),  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

8) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют пределы при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \geq g(x)$  (или  $f(x) > g(x)$ ),  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют одинаковый предел при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда функция  $\varphi(x)$  тоже имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



10) Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $\varphi: Y \rightarrow Z$  и существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция  $\varphi(f(x))$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ ,  
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = z_0 \quad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе***

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

### 3. Бесконечно большие функции

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (на языке  $M$ - $\delta$ , на языке окрестностей).

Функцию  $f(x)$  называют **бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$**  (в точке  $x_0$ ), если  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  
если  $x \in U^*(x_0, \delta)$ , то  $|f(x)| > M$ .

*Замечание.* Условие  $|f(x)| > M$  означает, что  $f(x) \in U(\infty, 1/M)$ .

$\Rightarrow$  Записывают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ , при  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $\infty$ ».

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2** (на языке последовательностей).

Функцию  $f(x)$  называют **бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$** , если для любой последовательности  $\{x_n\}$  значений аргумента, стремящейся к  $x_0$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  стремится к  $\infty$ .

**ТЕОРЕМА 4.** Определение бесконечно большой функции на языке  $M$ - $\delta$  и на языке последовательностей – эквивалентны.

Частные случаи бесконечно больших функций:

1)  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $|f(x)| = f(x) > M$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $+\infty$ ».

2)  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $|f(x)| = -f(x) > M$

$\Rightarrow f(x) < -M$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $-\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $-\infty$ ».

# СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

- 1) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $1/f(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ .  
Если  $\alpha(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $1/\alpha(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .  
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)
- 2) Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. функции одного знака, то их сумма  $f(x) + g(x)$  – б.б. того же знака.
- 3) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ ,  $g(x)$  – ограничена в некоторой окрестности  $U^*(x_0, \delta)$ , то их сумма  $f(x) + g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .
- 4) Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  – тоже б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

5) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ ,  $g(x)$  – имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ ,  
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

6) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$  имеет место  
неравенство  $|f(x)| < |g(x)|$  ( $|f(x)| \leq |g(x)|$ ),  
то функция  $g(x)$  тоже является б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

7) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. одного знака при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое,  
что  $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .  
Тогда функция  $\varphi(x)$  тоже является б.б. того же знака при  
 $x \rightarrow x_0$ .

(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)