

Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: *Понятие функции*

(основные определения, классификация, основные
характеристики поведения)

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

Литература

- Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2*
- Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*
- Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа*
- Запорожец Г.И. *Руководство к решению задач по математическому анализу*

Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются с помощью пределов.

Глава I. Введение в анализ

§1. Понятие функции

1. Основные понятия

Пусть X, Y – множества произвольной природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $\forall x \in X$ поставлен в соответствие *единственный* элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция (отображение)** с множеством значений Y .

Записывают: $f: X \rightarrow Y, \quad y = f(x)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: X – **область (множество) определения функции**

x ($x \in X$) – **аргумент (независимая переменная)**

Y – **область (множество) значений**

y ($y \in Y$) – **зависимая переменная (функция)**

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

- 1) словесный;
- 2) табличный;
- 3) графический;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Графиком функции** $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости с координатами $(x; f(x))$.

График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$ ».

- 4) аналитический:
 - а) явное задание (т.е. формулой $y = f(x)$)
 - б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы две функции:

$$f: X \rightarrow Y, f(x) = y$$

и

$$\varphi: Y \rightarrow Z, \varphi(y) = z.$$

Функция $\psi: X \rightarrow Z, \psi(x) = z$ называется **композицией функций φ и f** или **сложной функцией**.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\varphi \circ f$ или φf .

Итак, по определению,

$$\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$$

Поэтому сложную функцию называют еще **функцией от функции**. При этом функцию φ называют **внешней**, функцию f – **внутренней**.

Пусть задана функция $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = y$ и $y_0 \in Y$.

Возможны два случая:

- а) существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$;
- б) существуют $x_1, x_2, \dots \in X$ такие, что $f(x_i) = y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $\forall y_0 \in Y$ существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$, то функцию $f(x)$ называют **биекцией** (или **взаимно однозначной**).

Если $y = f(x)$ – биекция, то можно определить функцию

$$\varphi: Y \rightarrow X, \varphi(y_0) = x_0 .$$

Эту функцию называют **обратной к функции f** и в общем случае обозначают f^{-1} .

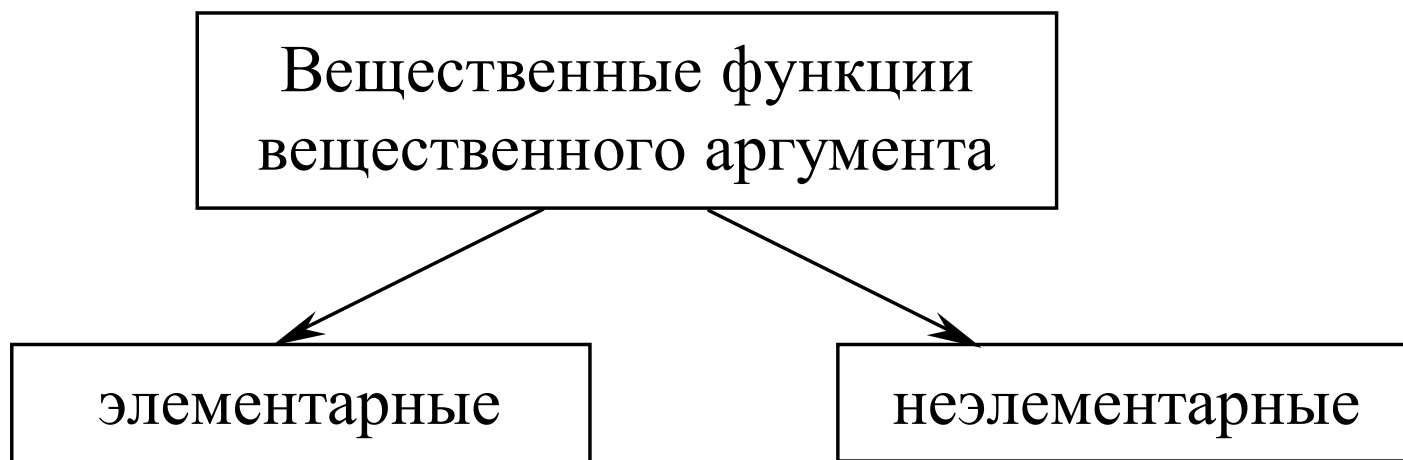
Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y .

Поэтому *графики функции $y = f(x)$ и ее обратной функции $x = f^{-1}(y)$ совпадают.*

Для удобства, обратную функцию записывают в виде $y = f^{-1}(x)$ (т.е. переобозначают переменные).

Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла (т.к. при переобозначении переменных оси Ox и Oy меняются местами).

2. Классификация вещественных функций, вещественного аргумента



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ:

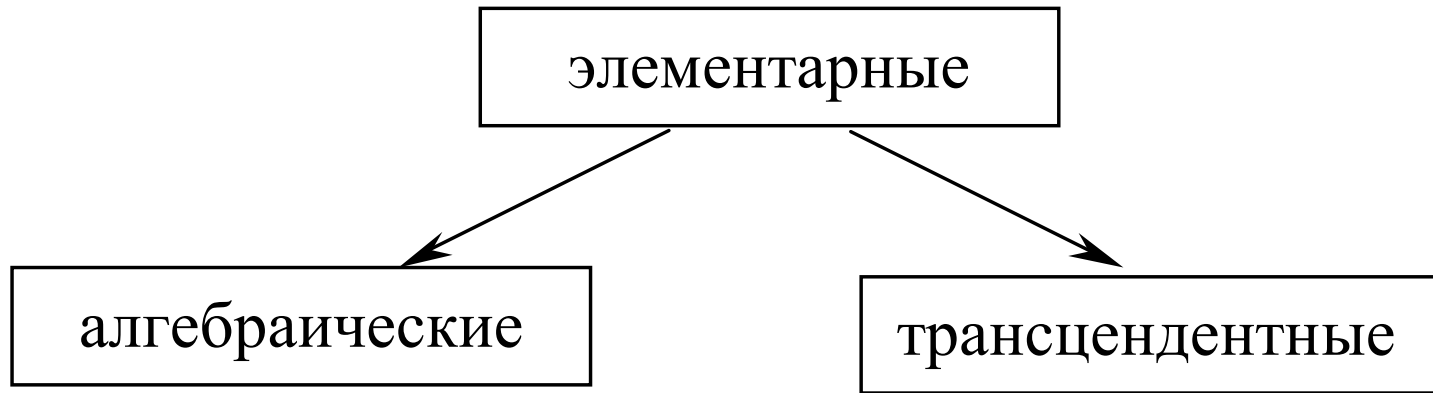
1) степенные: $y = x^r$ ($r \in \mathbb{R}$)

2) показательные: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

3) логарифмические: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

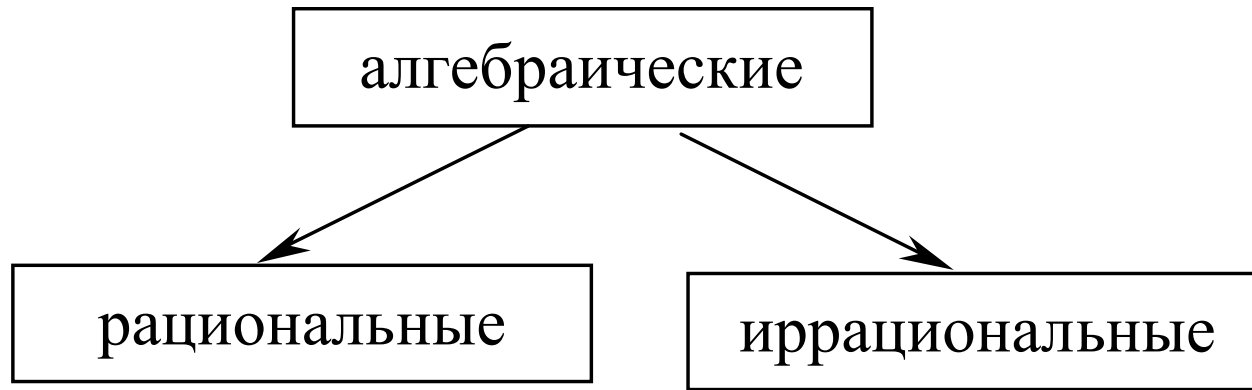
4) тригонометрические: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$

5) обратные тригонометрические: $y = \operatorname{arcsin} x, y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$



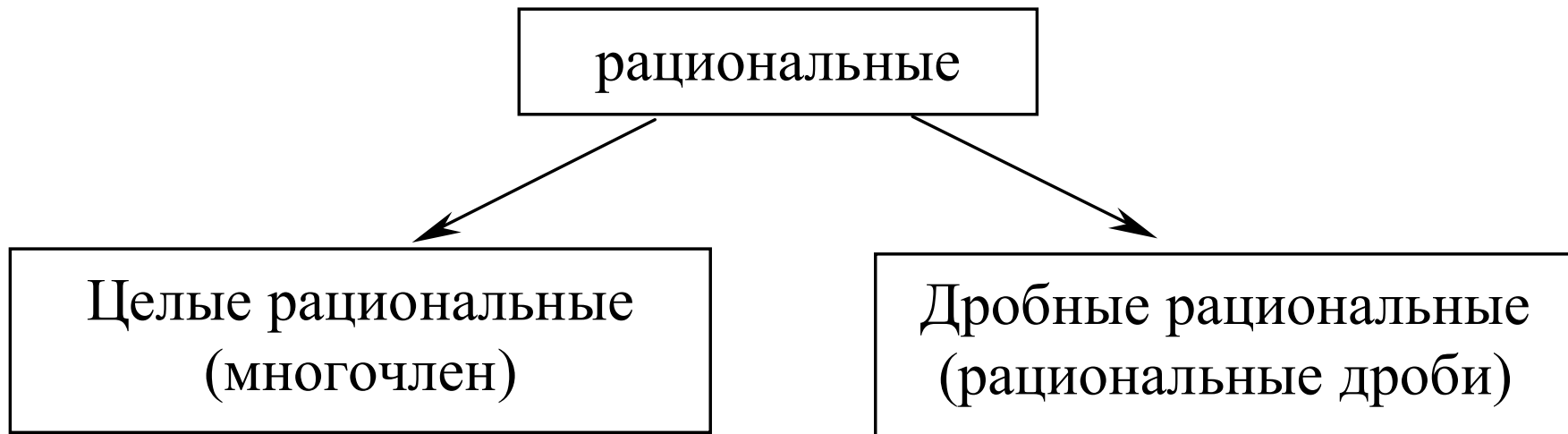
Функция называется *алгебраической*, если ее значения можно получить из аргумента и действительных чисел с помощью конечного числа алгебраических операций (т.е. сложения, вычитания, умножения, деления) и возведения в степень с рациональным показателем.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.



Алгебраическая функция называется *рациональной*, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корня.

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*.



Многочлен (полином) – рациональная функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$ (n – **степень многочлена**),

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (a_0, a_1, \dots, a_n – **коэффициенты многочлена**).

Рациональная дробь – отношение двух многочленов, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$$

3. Основные характеристики поведения функции

1) Четность функции

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если :

- а) область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
- б) $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если :

- а) область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
- б) $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется **функцией общего вида**.

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Периодичность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $y = f(x) \neq \text{const}$ называется **периодической**, если $\exists t \neq 0$ такое, что

а) $x + t, x - t \in D(f), \forall x \in D(f)$;

б) $f(x \pm t) = f(x)$.

Число t при этом называют **периодом функции**.

Если $y = f(x)$ – периодическая, то ее наименьший положительный период T называют **основным периодом**.

\Rightarrow любой период функции имеет вид kT , где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) Монотонность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**неубывающей**) на интервале $(a;b)$ если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** (**невозрастающей**) на интервале $(a;b)$ если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются **монотонными**.

4) Ограниченность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a \leq f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R}$ такое, что

$$f(x) \leq b, \quad \forall x \in D(f).$$

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется **ограниченной**.

\Rightarrow Функция ограниченная, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \leq f(x) \leq b, \quad \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow \exists M > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in D(f).$$