Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Кривые второго порядка***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§ 15. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка делятся на

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные кривые второго порядка это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка).

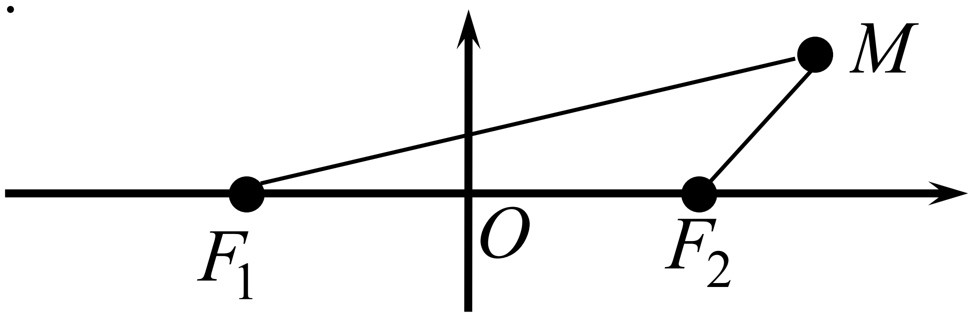
Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола.

1. Эллипс и окружность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a>|F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** эллипса.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

Уравнение (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его ***канонической системой координат***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА

1) Эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного $x = \pm a$, $y = \pm b$.
2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

   Центр симметрии эллипса называют ***центром эллипса***.

   Ось симметрии эллипса, проходящую через фокусы (ось Ox) называют ***большой*** (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – ***малой*** осью.
3) Из уравнения эллипса получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Исследуем кривую $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ методами, разработанными в математическом анализе:

а) $D(y) = [-a;\, a]$, $y(\pm a) = 0$;

б) $y' = \dfrac{b}{a} \cdot \left(-\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)$

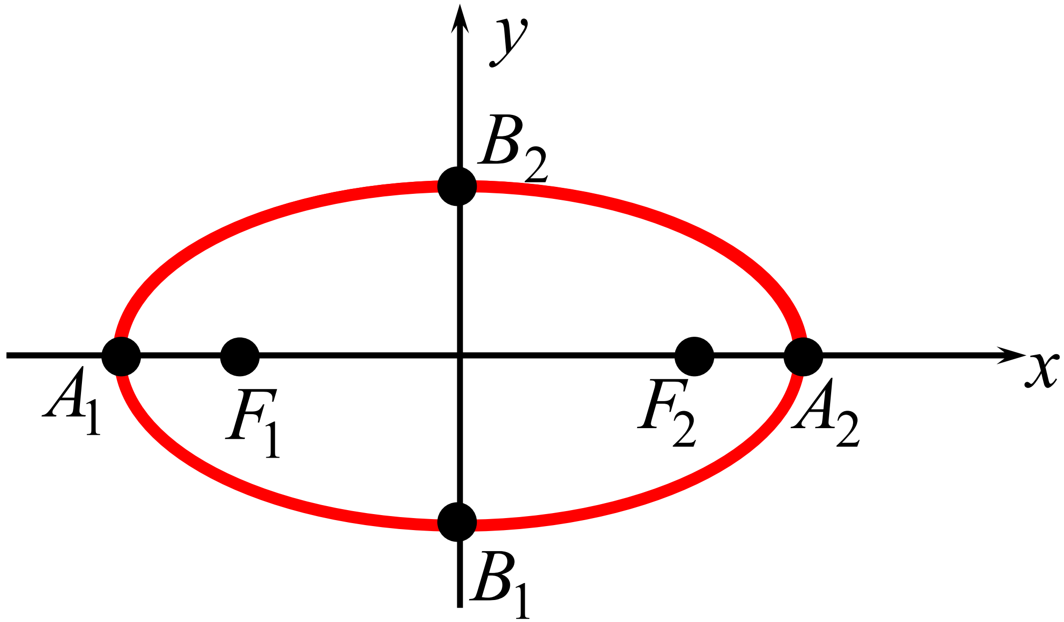
$\Rightarrow$ функция возрастает при $x \in (-a;\, 0)$ $(y' > 0)$,

убывает при $x \in (0;\, a)$ $(y' < 0)$,

экстремум (максимум) в точке $x = 0$, $y(0) = b$;

в) $y'' = -\dfrac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} < 0$

$\Rightarrow$ кривая всюду выпуклая .



Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 называются ***вершинами эллипса***.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***большой*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***малой осью***.

Величины a и b называются ***большой*** и ***малой полуосью*** соответственно.

Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина ε, равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, называется* ***эксцентриситетом*** *эллипса*, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.
Величина ε характеризует форму эллипса.
Зная ε эллипса легко найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$:

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Замечания.

1) Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0 \quad \Rightarrow F_1 = F_2 = O, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0$$

Геометрически, это означает, что точки кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O, т.е. кривая является ***окружностью***.

Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде $x^2 + y^2 = r^2$, где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют ***радиусом окружности***.

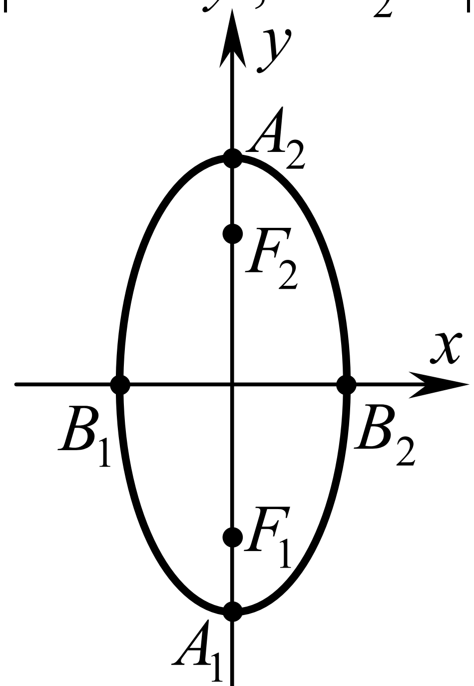
2) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Для этого эллипса большая ось – ось Oy, малая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y, \quad r_2=|MF_2|=a-\varepsilon y.$$

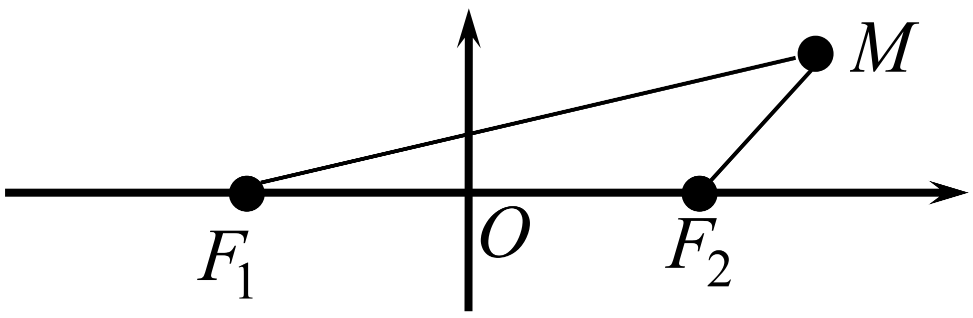


2. Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости* F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная и равная* $2a$ $(2a < |F_1F_2|)$.

Точки F_1 и F_2 называют ***фокусами*** гиперболы.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от O.



В такой системе координат:

$$F_1(-c;0) \quad \text{и} \quad F_2(c;0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

Уравнение (2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее ***канонической системой координат***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ

1) Точек гиперболы нет в полосе, ограниченной прямыми $x=\pm a$.
2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

   Центр симметрии гиперболы называют ***центром гиперболы***.

   Ось симметрии гиперболы, проходящую через фокусы (ось Ox) называют ***действительной*** (или ***фокальной***) ***осью*** симметрии, а вторую ось (ось Oy) – ***мнимой осью***.
3) Из уравнения гиперболы получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Исследуем кривую $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ методами, разработанными в математическом анализе:

а) $D(y) = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, $y(\pm a) = 0$;

б) линия $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ имеет асимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

Напомним:

Прямая ℓ называется ***асимптотой*** кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой ℓ стремится к нулю при удалении точки M от начала координат.

Существуют два вида асимптот – ***вертикальные*** и ***наклонные***.

Вертикальные асимптоты кривая $y=f(x)$ имеет в тех точках разрыва II рода функции $y=f(x)$, в которых хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности.

Наклонные асимптоты кривой $y=f(x)$ имеют уравнение $y=k_{1,2}x+b_{1,2}$, где

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - k_{1,2}x\right].$$

в) $y' = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$\Rightarrow$ функция возрастает при $x \in (a; +\infty)$ $(y' > 0)$,

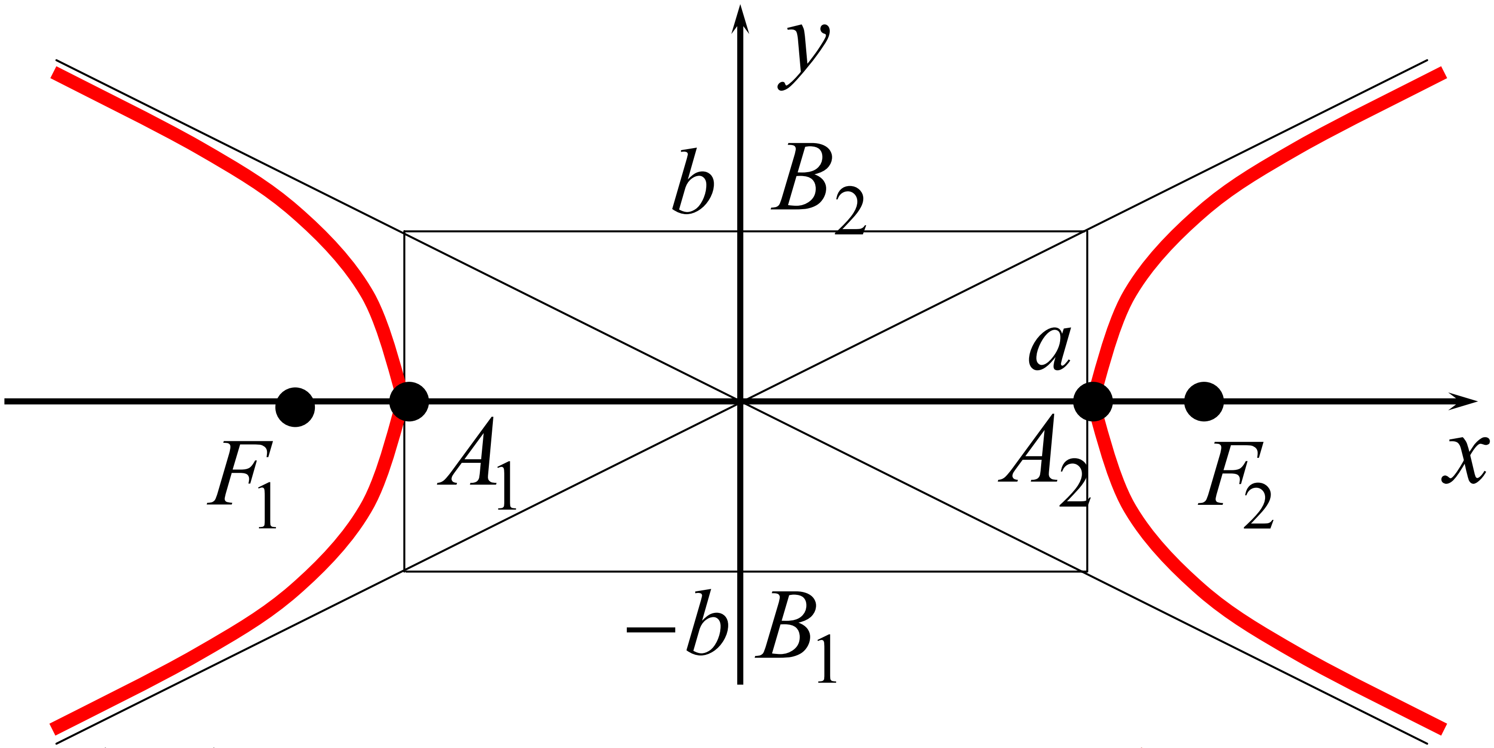
убывает при $x \in (-\infty; -a)$ $(y' < 0)$,

экстремумов нет

(критические точки $x = 0 \notin D(y)$ и $x = \pm a$ – граничные);

г) $y'' = \dfrac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} < 0$

$\Rightarrow$ кривая всюду выпуклая .



Точки A_1, A_2 называются ***вершинами гиперболы***.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются ***действительной*** (***фокальной***) ***осью***, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – ***мнимой осью***.

Величины a и b называются ***действительной*** и ***мнимой полуосью*** соответственно.

Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется ***фокусным расстоянием***. Если M – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются ***фокальными радиусами точки*** M

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина* ε *, равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси, называется* ***эксцентриситетом*** *гиперболы,* т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$.

Величина ε характеризует форму гиперболы.

Знаая эксцентриситет гиперболы легко найти фокальные радиусы точки $M(x;y)$.

Если точка M лежит на правой ветке гиперболы (т.е. $x > 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x , \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon x .$$

Если M лежит на левой ветке гиперболы (т.е. $x < 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon x) , \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon x) .$$

Замечания.

1) Если в уравнении гиперболы $a=b$, то гипербола называется ***равнобочной***.

Асимптоты равнобочной гиперболы, перпендикулярны.

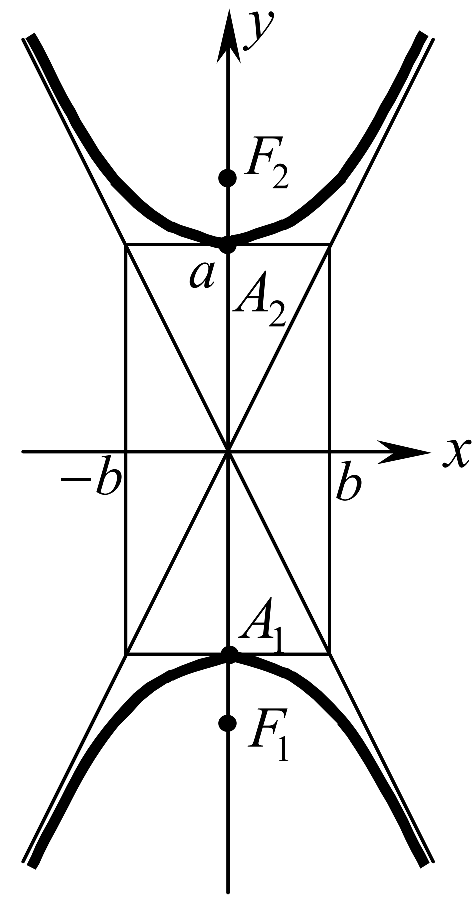
$\Rightarrow$ можно выбрать систему координат так, чтобы координатные оси совпали с асимптотами. Тогда уравнение гиперболы будет

$$xy=0{,}5a^2 \,. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют ***уравнением равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам***.

2) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Для этой гиперболы:

действительная ось – ось Oy,

мнимая ось – ось Ox,

$F_1(0;-c)$ и $F_2\,(0;c)$ (где $c=\sqrt{a^2+b^2}$)

асимптоты: $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

фокальные радиусы точки $M(x;y)$ находятся по формулам

а) при $y>0$:

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y, \quad r_2=|MF_2|=-a+\varepsilon y;$$

б) при $y<0$:

$$r_1=|MF_1|=-(a+\varepsilon y), \quad r_2=|MF_2|=-(-a+\varepsilon y).$$

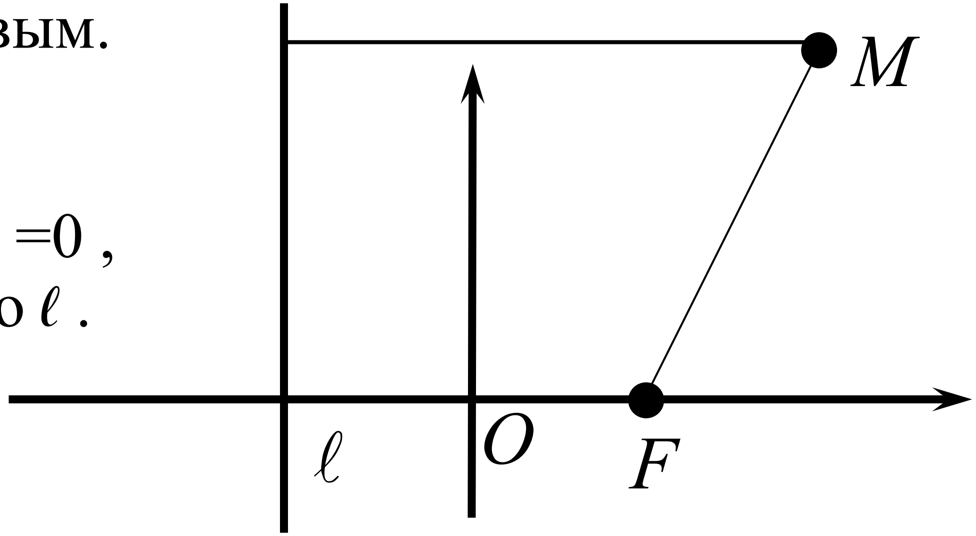
3. Парабола

Пусть ℓ – некоторая прямая на плоскости, F – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой ℓ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Параболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой ℓ и до фиксированной точки F (не лежащей на прямой ℓ) одинаково*.

Точку F называют ***фокусом параболы***, прямую ℓ – ***директрисой***.

Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы директриса параболы ℓ была перпендикулярна оси Ox, фокус F лежал на положительной части Ox и расстояние от O до F и до ℓ было одинаковым.



В такой системе координат:

$F(0{,}5p;0)$ и ℓ: $x + 0{,}5p = 0$,

где p – расстояние от F до ℓ .

Уравнение (4): $y^2 = 2px$

называется ***каноническим уравнением параболы***.

Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее ***канонической системой координат***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛЫ

1) Парабола лежит в полуплоскости $x \geq 0$.

2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox).
Ось симметрии параболы называют ***осью параболы***.

3) Из уравнения параболы получаем: $y = \pm\sqrt{2px}$

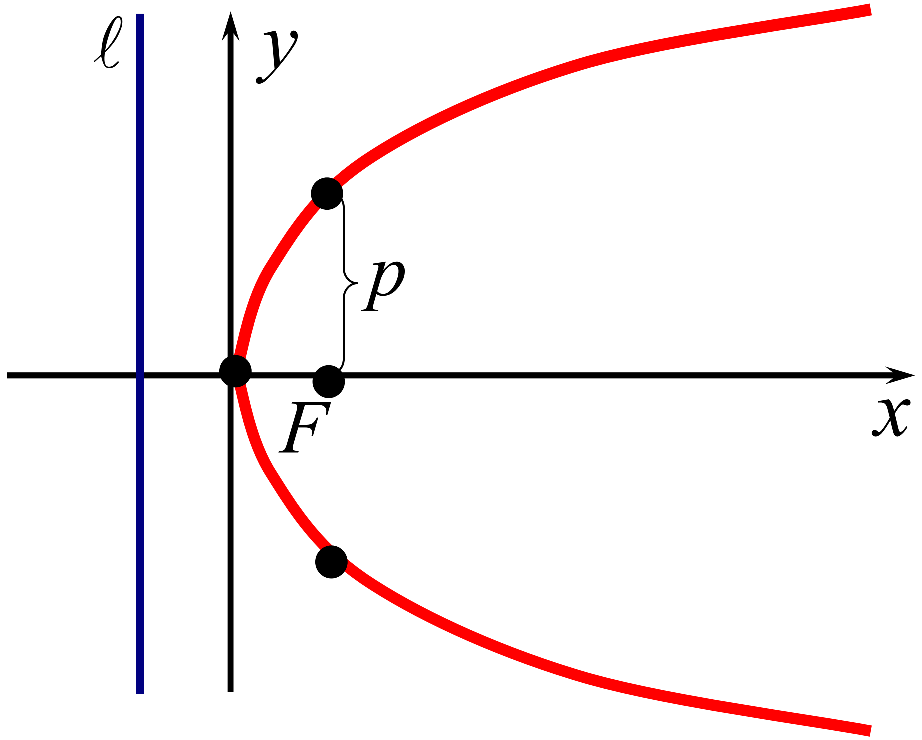
Исследуем кривую $y = \sqrt{2px}$ методами, разработанными в математическом анализе:

а) $D(y) = [0; +\infty)$, $y(0) = 0$;

б) асимптот нет (проверить самим);

в) $y' = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0$ $\Rightarrow$ функция всюду возрастает;

г) $y'' = -\dfrac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}} < 0$ $\Rightarrow$ кривая всюду выпуклая .

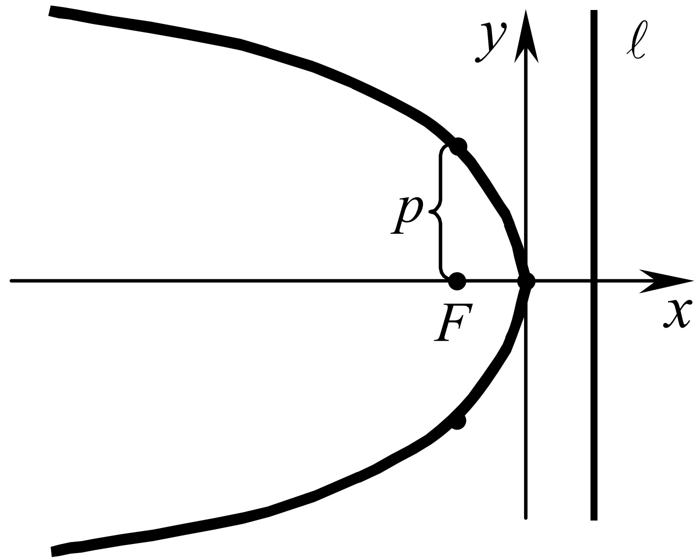


Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ***вершиной параболы***,

Число p называется ***параметром параболы***.

Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются ***фокальными радиусами точки*** M.

Замечание. Введем систему координат так, чтобы фокус F параболы лежал на отрицательной части оси Ox, директриса была перпендикулярна Ox, и расстояние от O до F и до директрисы было одинаково.



Тогда получим для параболы уравнение

$$y^2 = -2px, \qquad (5)$$

а для директрисы и фокуса:

$$F(-0{,}5p;0) \quad \text{и} \quad \ell : x - 0{,}5p = 0.$$

Выберем систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна Oy, фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и O была на одинаковом расстоянии от F и от директрисы (рис. 2 и рис. 3):

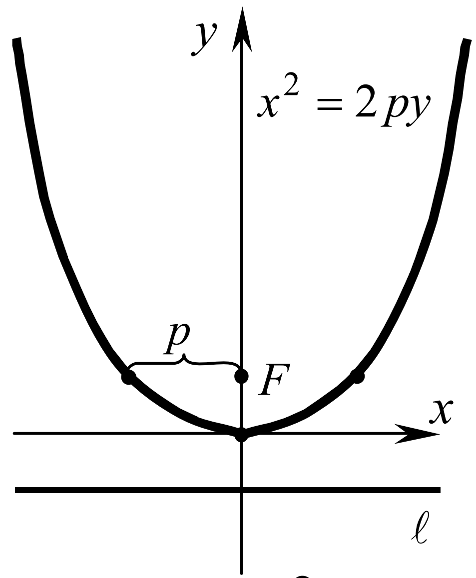


рис. 2

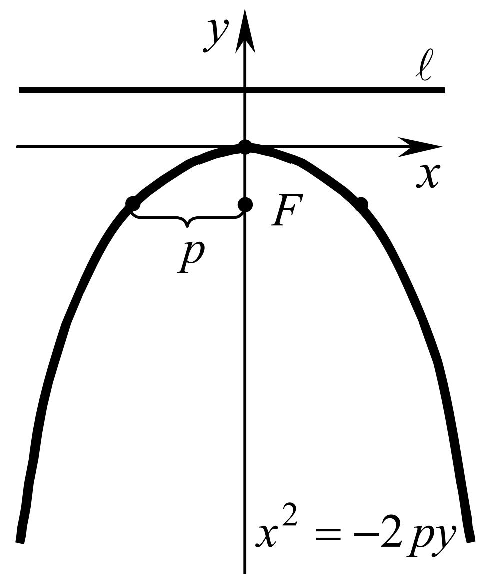


рис. 3

Тогда уравнение параболы будет иметь вид $x^2 = \pm 2py$, (6)

а для директрисы и фокуса получим:

$$F(0; \pm 0{,}5p) \quad \text{и} \quad \ell : y \pm 0{,}5p = 0.$$

Уравнения (5) и (6) тоже называются ***каноническими уравнениями параболы***, а соответствующие им системы координат – ***каноническими системами координат***.

4. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямые* $\ell_{1,2} : x = \mp \dfrac{a}{\varepsilon}$ *называются* ***директрисами*** *эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *и гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Пусть M – произвольная точка эллипса или гиперболы.

$$r_{\mathrm{i}} = |\, MF_{\mathrm{i}}\,| \,, \qquad d_{\mathrm{i}} = d(M, \ell_{\mathrm{i}})$$

ТЕОРЕМА. *Для любой точки* M *эллипса (гиперболы) имеет место равенство* $\dfrac{r_i}{d_i} = \varepsilon$

Замечание. По определению параболы $r = d$.

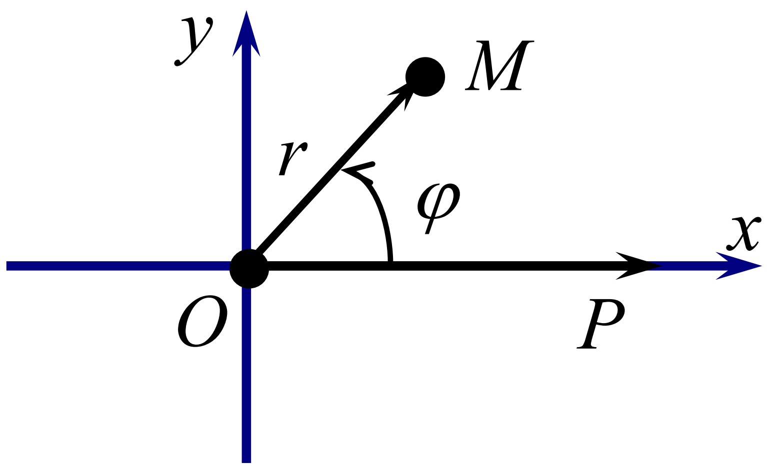
$\Rightarrow$ параболу можно считать кривой, у которой эксцентриситет $\varepsilon = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная* ε *, называется*

1) *эллипсом, если* $\varepsilon<1$;
2) *гиперболой, если* $\varepsilon>1$;
3) *параболой, если* $\varepsilon = 1$.

5. Полярное уравнение эллипса, параболы и ветки гиперболы

Полярная система координат:

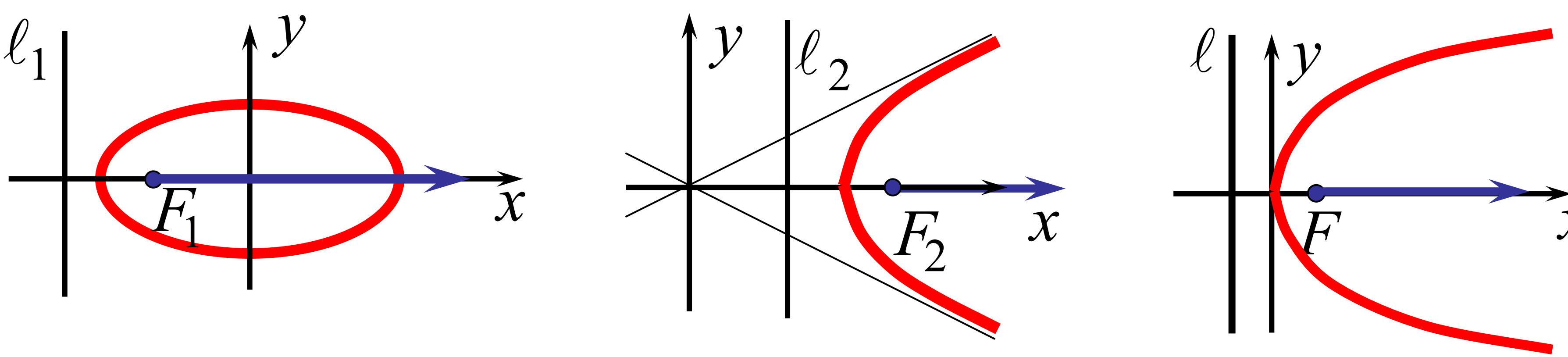


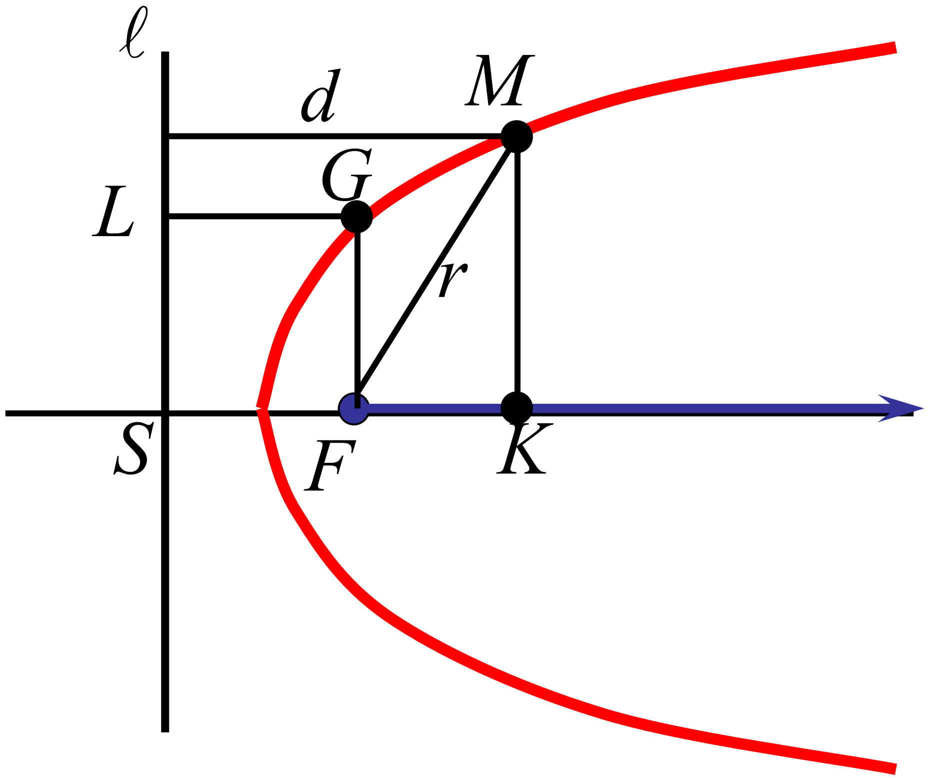
O – полюс; OP – полярная ось.
r – полярный радиус точки M;
φ – полярный угол точки M.

Связь декартовых и полярных координат:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi .$$

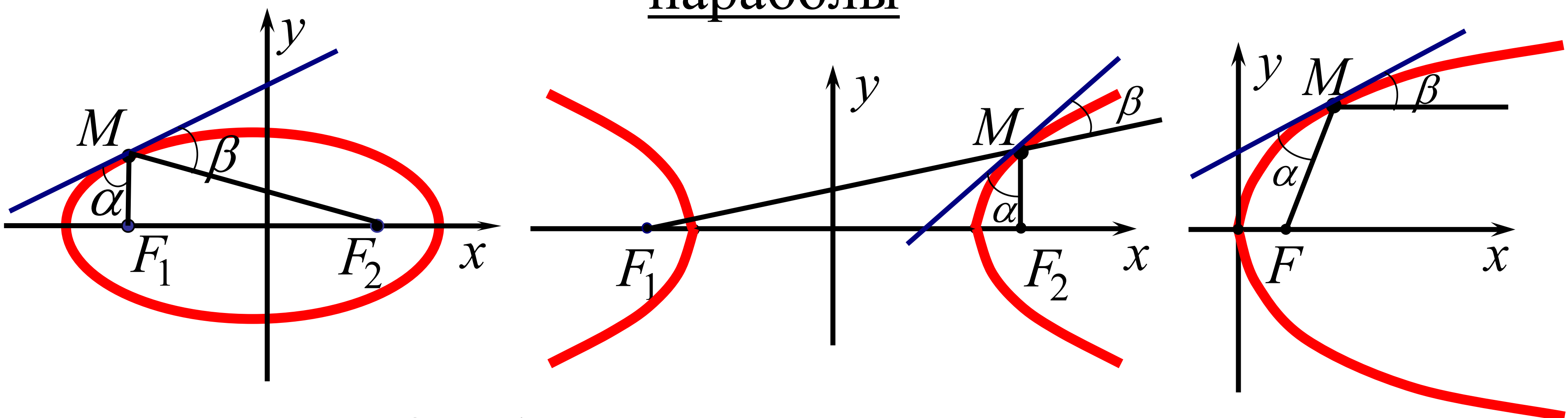
Введем на плоскости полярную систему координат иначе:





Уравнение $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ – уравнение эллипса, параболы и ветви гиперболы в полярной системе координат (***полярное уравнение кривой***).

6. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы

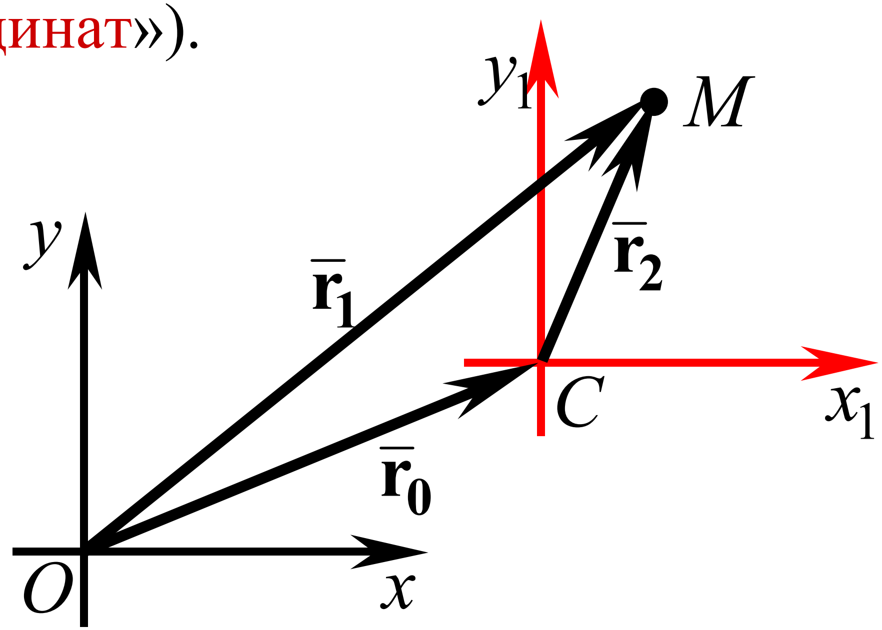


Получаем: $\alpha = \beta$.С физической точки зрения это означает:

1) Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.
2) Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.
3) Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее параллельно оси.

7. Координаты точки в разных системах координат Общее уравнение кривой второго порядка

а) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_1Cy_1 такие, что $Ox \uparrow\uparrow Cx_1$, $Oy \uparrow\uparrow Cy_1$ («параллельные системы координат»).



Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases} \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***формулой преобразования координат точки при переносе начала координат в точку*** $C(x_0;y_0)$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (9)$$

С помощью элементарных преобразований, уравнение (9) может быть приведено к виду:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) при } AC \neq 0: & \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1 \\ \text{2) при } C = 0: & (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \\ \text{3) при } A = 0: & (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

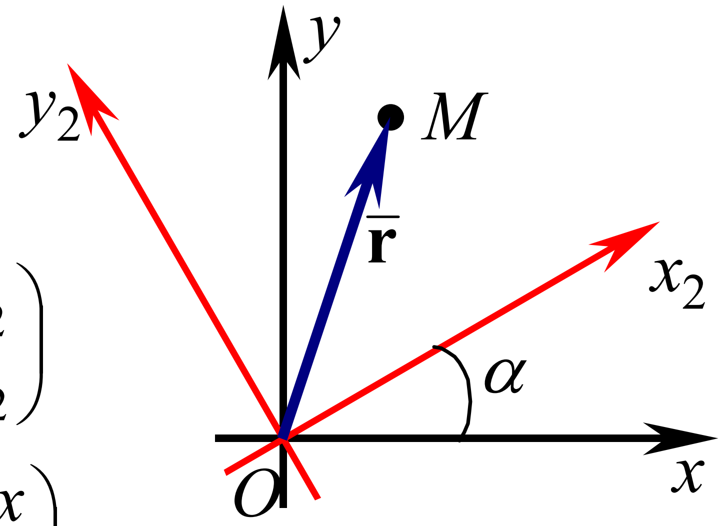
ВЫВОД: Уравнение (9) определяет кривую, каноническая система координат которой параллельна заданной, но имеет начало в точке $C(x_0,y_0)$.

Говорят: *уравнение* (9) *определяет кривую со смещенным центром (вершиной)*, а уравнение (10) называют ***каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)***.

Замечание. Приводить уравнение (9) к виду (10) необходимо, если мы хотим построить кривую. Тип кривой можно определить и без уравнения (10). А именно:

1) если $AC = 0$, то кривая является параболой;
2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой;
3) если $AC > 0$, $A \neq C$ – эллипсом;
4) если $AC > 0$, $A = C$ – окружностью.

б) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_2Oy_2 такие, что угол поворота от Ox к Ox_2 равен α («*x_2Oy_2* ***развернута по отношению к*** *xOy*»).



Получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y, \\ y_2 = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y. \end{cases} \qquad (11)$$

Формулу (11) называют ***формулой преобразования координат точки при повороте координатных осей.***

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \qquad (12)$$

Каноническая система координат x_2Oy_2 кривой (12) развернута относительно заданной на угол α. Ее можно найти следующим образом.

Пусть $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$\mathbf{Q}$ – матрица диагонализируемого оператора φ пространства $V^{(2)}$.

$\Rightarrow \exists$ базис $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{2}$ (единичной длины и ортогональные), в котором оператор φ имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Связь базисов:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}_1 = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \bar{\mathbf{c}}_2 = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j}. \end{cases}$$

Связь координат точки:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x_2 - \sin\alpha \cdot y_2, \\ y = \sin\alpha \cdot x_2 + \cos\alpha \cdot y_2. \end{cases} \qquad (13)$$

Преобразуем уравнение (12) с помощью формул (13).

Таким образом в системе координат x_2Oy_2 , оси которой определены векторами $\bar{\mathbf{c}}_1$ и $\bar{\mathbf{c}}_2$, уравнение кривой (12) будет иметь вид:

$$\lambda_1(x_2)^2 + \lambda_2(y_2)^2 + F = 0$$

АЛГОРИТМ построения кривой, заданной уравнением (12).

1) записать **Q** и найти ее собственные значения λ_1 , λ_2 ;

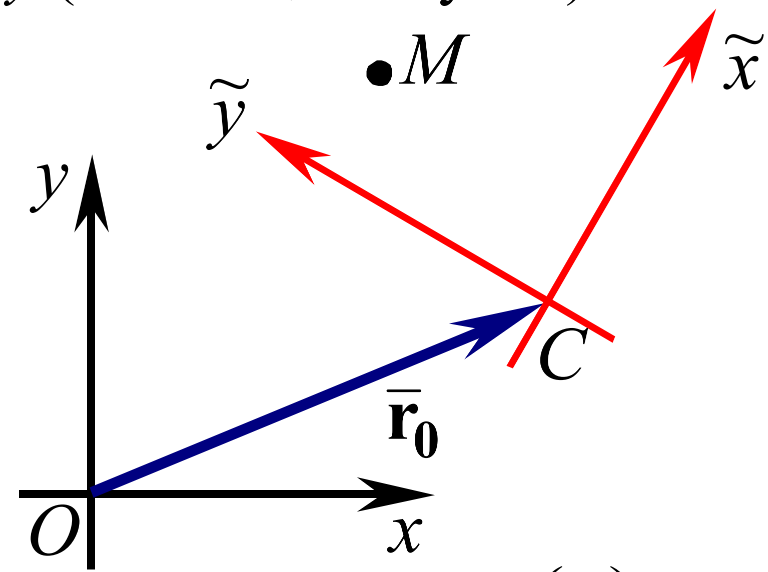
2) найти собственные векторы $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{2}}$ (единичной длины и ортогональные), и построить каноническую систему координат x_2Oy_2 ;

3) записать уравнение

$$\lambda_1(x_2)^2 + \lambda_2(y_2)^2 + F = 0$$

и построить кривую.

в) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\tilde{x}C\tilde{y}$ такие, что $\tilde{x}C\tilde{y}$ смещена и развернута по отношению к xOy (т.е. общий случай)



Из формул (11) и (8) получаем: $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - x_0, \\ \tilde{y} = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y - y_0. \end{cases} \qquad (14)$$

Формулу (14) называют ***формулой преобразования координат точки при переходе к новой системе координат***.

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (15)$$

Каноническая система координат кривой (15) развернута относительно заданной на угол α и ее начало смещено в некоторую точку.

Чтобы построить кривую 2-го порядка в общем случае необходимо найти ее каноническую систему координат и уравнение кривой в этой системе координат.

Это делают в 2 этапа:

1) Ищут систему координат, в которой уравнение кривой не содержит слагаемого с произведением переменных (разворачивают координатные оси на угол α).

2) Приводят полученное в 1) уравнение к виду (10) и сдвигают систему координат в точку C. Полученная система координат – каноническая.