Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Линейные операторы***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Определение линейного оператора

Пусть L и V – линейные пространства над $\boldsymbol{F}$ (где $\boldsymbol{F}$ – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция, заданная на L и имеющая областью значений $V_1 \subseteq V$ называется* ***оператором (преобразованием), действующим из L в V***.

Оператор, действующий из L в L, называют ***оператором пространства L***.

Если оператор $\varphi: L \to V$, $\varphi: x \to y$, то y называется ***образом элемента (вектора) x*** и обозначается $\varphi(x)$ или φx , x называют ***прообразом элемента (вектора) y***.

Оператор φ называется ***линейным***, если для любых $x_1, x_2 \in L$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{F}$ выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$,

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$.

Первое условие называется *свойством аддитивности*, второе – *свойством однородности* оператора. Вместе оба эти свойства называются *свойствами линейности оператора* и могут быть записаны в виде

$$\varphi(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot \varphi(x_1) + \beta \cdot \varphi(x_2)$$

где $x_1, x_2 \in \mathrm{L}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$.

ЛЕММА 1. Если φ – линейный оператор, то $\varphi(o) = o$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2. Линейные операторы конечномерных пространств

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n,
$e_1,\ldots,e_n$ – базис L_n

Разложим векторы $\varphi(e_i)$ по базису $e_1,e_2,\ldots e_n$:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \,,$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \,.$$

Матрицу **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

составленную из координат векторов $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ называют ***матрицей линейного оператора*** **φ** в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (относительно базиса $e_1,e_2,\ldots e_n$)

Если **A** – матрица линейного оператора φ в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$, то вектор x и его образ $y = \varphi(x)$ будут связаны соотношением:

$$\mathbf{Y=AX},$$

где **X, Y** – матрицы-столбцы из координат векторов x и y в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ – оператор n-мерного пространства* L_n , $e_1,e_2,\dots,e_n$ *и* $f_1,f_2,\dots,f_n$ *– два базиса пространства , причем*

$$f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n ,$$
$$f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n .$$

Если $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе* $e_1,e_2,\dots,e_n$,

$\mathbf{B}=(b_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе* $f_1,f_2,\dots,f_n$,

то

$$\mathbf{B=C^{-1}AC},$$

где $\mathbf{C}=(c_{ij})$ *– матрица перехода от базиса* $e_1,e_2,\dots e_n$ *к базису* $f_1,f_2,\dots,f_n$, *т.е.*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Квадратные матрицы **A** и **B**, для которых найдется невырожденная матрица **C** такая, что имеет место равенство $\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, называются ***подобными***.

3. Диагонализируемость линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Оператор φ n–мерного пространства L_{n} называется* ***диагонализируемым****, если в L_{n} существует базис, в котором матрица линейного оператора диагональная.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем*

$$\varphi(x)=\lambda\cdot x,$$

то число λ называется ***собственным значением оператора*** *φ, а вектор x называется* ***собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ***.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

1. ЛЕММА 3. *Каждый собственный вектор x оператора* φ *относится к единственному собственному значению.*
2. ЛЕММА 4. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора* φ, *относящиеся к одному и тому же собственному значению* λ, *то их линейная комбинация $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ – собственный вектор оператора* φ, *относящийся к тому же собственному значению.*

Следствия ЛЕММЫ 4:

а) *каждому собственному значению* λ *соответствует бесконечное множество собственных векторов;*

б) *если к множеству всех собственных векторов x оператора* φ, *относящихся к собственному значению* λ, *присоединить нулевой вектор, то получится подпространство пространства L. Оно называется* ***собственным подпространством оператора*** *и обозначается L_λ.*

3. ЛЕММА 5. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Следствия ЛЕММЫ 5:

а) *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n, *не может иметь более* n *собственных значений;*

б) *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы оператора.*

ТЕОРЕМА 6 (необходимое и достаточное условие диагональности матрицы оператора) .

Матрица $\mathbf{A}$ *оператора* φ *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *имеет диагональный вид* $\Leftrightarrow$ *все базисные векторы* e_i *являются собственными векторами этого оператора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРА: *оператор* φ *диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве* L_n *существует базис из собственных векторов оператора* .

Этот базис составляется из базисов собственных подпространств.

ВЫВОД: если система векторов, составленная из базисов собственных подпространств оператора, является базисом линейного пространства, то оператор диагонализируем.

5. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n, x – собственный вектор оператора φ, относящийся к собственному значению λ, т.е. $\varphi(x)= \lambda\cdot x$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис L_n,

A – матрица линейного оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$

Получили:

1) *x – собственный вектор оператора φ, относящийся к собственному значению λ ⇔ его координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются решением (нетривиальным) системы линейных однородных уравнений* $\mathbf{(A-\lambda E)X=O}$.

2) *Подпространство L_λ является конечномерным, а его базис образуют собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$, координатами которых являются решения из фундаментальной системы решений СЛОУ* $\mathbf{(A-\lambda E)X=O}$.

Матрица $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей оператора*** φ (матрицы $\mathbf{A}$) .

Определитель характеристической матрицы, т.е. $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ – многочлен степени n относительно переменной λ .

Многочлен $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ называют ***характеристическим многочленом*** **оператора** φ (**матрицы** $\mathbf{A}$).
Корни многочлена $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ называют ***характеристическими корнями оператора*** φ (***матрицы*** $\mathbf{A}$).

Таким образом, *число* λ *является собственным значением оператора* φ *тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем.*