Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Понятие линейного пространства***

(координаты вектора)

Простейшие задачи векторной алгебры

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

4. Координаты вектора

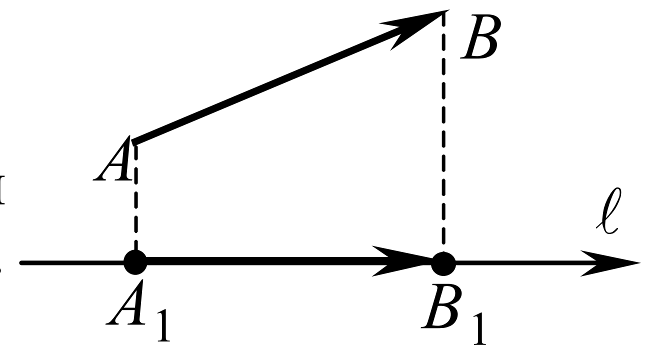
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Коэффициенты в разложении вектора по базису называются* ***координатами*** *этого вектора в данном базисе.*

КООРДИНАТЫ СВОБОДНЫХ ВЕКТОРОВ В ДЕКАРТОВОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАЗИСЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют* ***осью***.

Пусть ℓ – ось, $\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор.

Пусть A_1 и B_1 – ортогональные проекции на ось ℓ точек A и B соответственно.



Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем ***векторной проекцией вектора*** $\overline{\mathbf{AB}}$ ***на ось*** $\boldsymbol{\ell}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Проекцией*** (*ортогональной проекцией*) *вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось* ℓ *называется*

- *длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на ось* ℓ, *взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *сонаправлены,*
- *длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на ось* ℓ, *взятая со знаком минус, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *противоположно направлены.*

Обозначают: $\text{Пр}_{\ell}^{\perp}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$

ТЕОРЕМА 7 (геометрический смысл координат свободного вектора в декартовом прямоугольном базисе).

Координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}\in V^{(2)}$ $(V^{(3)})$ *в декартовом прямоугольном базисе* **i**, **j** (**i**, **j**, **k**) *есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.*

ТЕОРЕМА 8.

Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ – координаты вектора a в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$,

$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ – координаты вектора b в том же базисе.

Тогда

1) вектор $a + b$ будет иметь в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\};$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты

$$\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n\}.$$

ТЕОРЕМА 9 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\}$ *и* $\bar{\mathbf{b}} = \{\beta_1 ; \beta_2 ; \beta_3\}$ *коллинеарны* $\Leftrightarrow$ *их координаты пропорциональны*, т.е.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k.$$

Причем, если коэффициент пропорциональности $k > 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– сонаправлены*; *если* $k < 0$, *то* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– противоположно направлены* .

ТЕОРЕМА 10 (связь координат вектора в разных базисах).

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ *и* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *два базиса линейного пространства* L. *Причем имеют место равенства*

$$f_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n,$$
$$f_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n.$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, *а в базисе* $f_1, f_2, \dots, f_n$ – *координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, *то справедливо равенство* $\mathbf{A} = \mathbf{TB}$, *где*

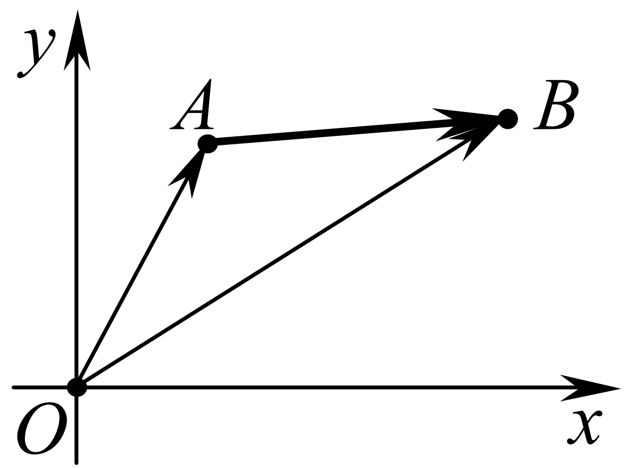
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицу **T** называют ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$.

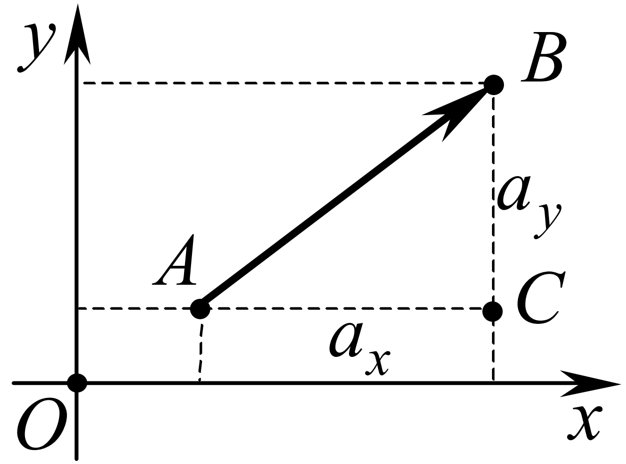
§8. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем в пространстве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис **i, j, k** (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.



ЗАДАЧА 2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.



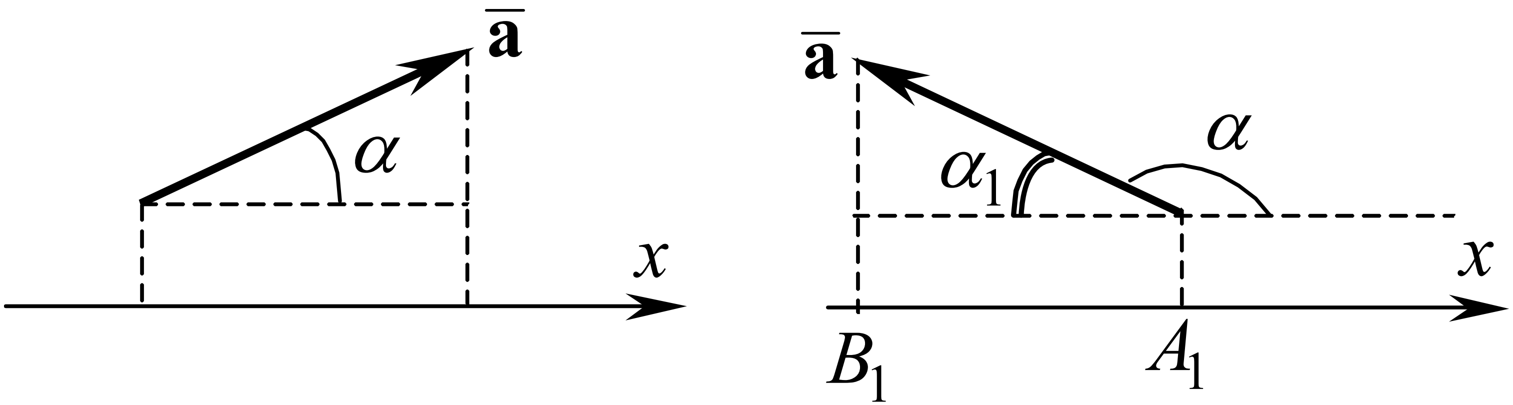
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ортом*** *вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_0$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину* .

Геометрический смысл координат орта вектора

Пусть α , β и γ – углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox , Oy и Oz соответственно .

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$.



К*оординаты орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами*.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_0|=1$ и $\bar{\mathbf{a}}_0=\{\cos\alpha ; \cos\beta ; \cos\gamma\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ* $(\lambda \neq -1)$ *если*

$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$$

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2 . В этом случае говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2. В этом случае говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внешнем отношении*.