Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Определители***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§2. Определители

1. Вспомогательные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть n – натуральное число.* ***Факториалом*** *числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Кроме того, факториал числа 0 *полагают равным* 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расположение n различных чисел в любом порядке называется* ***перестановкой*** *этих чисел.*

Пусть дана некоторая перестановка n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется ***числом инверсий в перестановке***.

2. Определение определителя

Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Определителем матрицы А*** (***определителем порядка*** n) *называется число, равное алгебраической сумме* $n!$ *слагаемых, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца;*

2) *слагаемое берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число. В противном случае слагаемое берется со знаком «минус».*

Определитель матрицы **A** обозначают $|\mathbf{A}|$, $\det\mathbf{A}$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно ***элементами, строками, столбцами определителя*** матрицы.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений.

Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали.

Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали. Т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

3. Свойства определителей

1) *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.*
2) *При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.*
3) *Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.*

Доказать самостоятельно

4) *Если все элементы* k*-й строки определителя* $|\mathbf{A}|$ *являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей* $|\mathbf{A_1}|$ *и* $|\mathbf{A_2}|$, *у которых все строки кроме* k*-й совпадают со строками определителя* $|\mathbf{A}|$, *а* k*-я строка в определителе* $|\mathbf{A_1}|$ *состоит из первых слагаемых, а в определителе* $|\mathbf{A_2}|$ *– из вторых слагаемых.*

Доказать самостоятельно

5) *Определитель равен нулю если*:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Доказать самостоятельно

Замечание. i-ю строку (i-й столбец) определителя $|\mathbf{A}|$ называют линейной комбинацией его строк (столбцов) $i_1, i_2, \ldots, i_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, если каждый элемент i-й строки (столбца) является линейной комбинацией соответствующих элементов строк (столбцов) $i_1, i_2, \ldots, i_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Т.е.

$$a_{ij} = \lambda_1 \cdot a_{i_1 j} + \lambda_2 \cdot a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_k \cdot a_{i_k j}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$(\, a_{ji} = \lambda_1 \cdot a_{ji_1} + \lambda_2 \cdot a_{ji_2} + \ldots + \lambda_k \cdot a_{ji_k}, \quad j = \overline{1, n}\,)$$

6) Критерий равенства нулю определителя

Определитель равен нулю $\Leftrightarrow$ *хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).*

7) *Определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число* $\alpha \neq 0$.

Доказать самостоятельно

8) *Если* **A** *и* **B** *– квадратные матрицы порядка n , то существует* **AB** *и* **BA**, *причем* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

4. Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть **A** = (a_{ij}) – матрица размера $m \times n$.

Выберем в **A** произвольно k строк: $i_1, i_2, \ldots, i_k$

и k столбцов: $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов составим определитель M_k :

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Определитель M_k называют минором k-го порядка матрицы **A**.

Частные случаи:

а) любой элемент матрицы – минор первого порядка;

б) определитель квадратной матрицы порядка n – ее минор порядка n.

Пусть **A** = (a_{ij}) – квадратная матрица порядка n.

Выберем в **A** минор M_k (строки: $i_1, \dots, i_k$, столбцы: $j_1, \dots, j_k$).

Вычеркнем из матрицы **A** строки и столбцы, из элементов которых состоит минор M_k.

Определитель M_k^*, составленный из оставшихся элементов матрицы **A**, называется ***дополнительным минором к минору*** M_k.

Число $A_k = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} \cdot M_k^*$ называется ***алгебраическим дополнением минора*** M_k.

Частный случай:

дополнительный минор элемента a_{ij} (его обозначают M_{ij}) – это определитель порядка n – 1, полученный из определителя |**A**| вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (его обозначают A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

ТЕОРЕМА (Лапласа). *Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов)* (*где* $1 \leq k \leq n-1$).
Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (*столбцах*), *на их алгебраические дополнения.*

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|\mathbf{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \qquad (3)$$

$$|\mathbf{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj} \qquad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (теоремы Лапласа). *Сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраический дополнения соответствующих элементов k-й строки (столбца) этого определителя равна нулю*. Т.е.

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0 \qquad (5)$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=0 \qquad (6)$$