Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Матрицы и действия над ними***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

Литература

- Барышева В.К., Пахомова Е.Г., Рожкова О.В. *Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии*
- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*
- Ефимов Н.В. *Краткий курс аналитической геометрии*
- Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*
- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. *Сборник задач по линейной алгебра и аналитической геометрии*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. *Руководство к решению задач по аналитической геометрии*

Глава I. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Матрицей размера*** $m \times n$ *называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая* m *строк и* n *столбцов.*

Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***.

Если $m = n$, то матрицу называют ***квадратной, порядка n***.

Элементы, из которых составлена матрица, называются ***элементами матрицы***.

Например, a_{24} –

a_{13} –

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=(a_{ij}),\ (i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$$

$$\mathbf{A}=(a_{ij}),\ \ (i,j=\overline{1,n})$$

Две матрицы **A** и **B** считаются ***равными***, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в **A** и **B** на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{\mathrm{ij}}=b_{\mathrm{ij}}$.

Некоторые частные случаи матриц

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$ называют

матрицей-столбцом длины m .

2) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (a_{1i})$, размера $1 \times n$ называют ***матрицей-строкой длины n*** .

3) ***Нулевой матрицей*** называют матрицу, все элементы которой равны нулю:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4) Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{kk} (где $\mathrm{k}=\min\{\mathrm{m,n}\}$) будем называть ***элементами главной диагонали матрицы***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется ***единичной***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначают: $\mathbf{E}$ или $\mathbf{E}_{\mathrm{n}}$.

5) Пусть **A** = (a_{ij}) – квадратная матрица порядка n. Элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, …, a_{n1} будем называть ***элементами побочной диагонали матрицы***.

Квадратные матрицы, у которых все элементы ниже (выше) главной или побочной диагонали равны нулю, называются ***треугольными*** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \dots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

6) Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***трапециевидной***, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Линейные операции над матрицами

1) Умножение матрицы на число;

2) Сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением матрицы*** **A**=(a_{ij}) ***на число*** α *называется такая матрица* **B**=(b_{ij}), *элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы* **A** *на число* α, т.е. $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Обозначают: $\alpha \cdot$**A**, α**A**.

Частный случай: (-1)·**A** – ***противоположная матрице*** **A**,

Обозначают –**A.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой двух матриц*** **А**=(a_{ij}) *и* **В**=(b_{ij}) *одинакового размера, называется такая матрица* **С**=(c_{ij}), *элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц* **А** и **В**, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Обозначают: **А+В**

Частный случай: **А+(–В)** – ***разность матриц*** **А** и **В.**

Обозначают: **А–В**

Свойства линейных операции над матрицами

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (коммутативность сложения матриц);

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (ассоциативность сложения матриц);

3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$;

4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$;

5) $\alpha \cdot (\beta\mathbf{A}) = (\alpha \cdot \beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность относительно умножения чисел) ;

6) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел);

7) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц);

8) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

3. Нелинейные операции над матрицами

1) Умножение двух матриц;

2) Транспонирование матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A**=(a_{1i}) и **B**=(b_{i1}) – *матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины* n.

Произведением матрицы-строки A на матрицу-столбец B *называется число c, равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.*

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *– матрица размера* $m \times n$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ *– матрица размера* $n \times \mathrm{k}$ *(т.е. количество столбцов в матрице* **A** *совпадает с количеством строк матрицы* **B***).*

***Произведением матрицы* A *на матрицу* B** *называется матрица* $\mathbf{C}=(c_{ij})$ *размера* $m \times k$ *такая, что каждый ее элемент* c_{ij} *является произведением* *i-й* *строки матрицы* **A** *на* *j-й* *столбец матрицы* **B**, *т.е.*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} .$$

Обозначают: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$.

Свойства операции умножения матриц

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$;

2) $\mathbf{(AB)C} = \mathbf{A(BC)}$ (ассоциативность умножения матриц) ;

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \mathbf{(A + B)C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}\ ; \\[2ex] 4)\ \mathbf{C(A + B)} = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}\ . \end{array}\right\} \quad \text{– дистрибутивность умножения матриц относительно сложения матриц}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A** *– матрица размера* $m \times n$.

Матрица размера $n \times m$, *полученная из* **A** *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется* ***транспонированной*** *к* **A** *и обозначается* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Операция нахождения матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ *называется* ***транспонированием*** *матрицы* **A**.

Свойства операции транспонирования матриц

1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$;
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;
3) $(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;
4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.