

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА , АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

О.В. Рожкова

В.И. Рожкова

Г.М. Матвееenko

Г.А. Никольская

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, в которой в специальном порядке записаны $m \cdot n$ элементов a_{ij} :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Первый индекс i является номером строки, а второй индекс j – номером столбца, на пересечении которых в матрице стоит элемент a_{ij} .

Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число строк – ее порядком. Остальные матрицы называют *прямоугольными*.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ считаются *равными* ($A = B$) тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы $a_{ij} = b_{ij}$, ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Диагональ квадратной матрицы, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называется *главной*, а диагональ, которая содержит элементы $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$, называется – *побочной*.

Суммой $A + B$ ($m \times n$) – матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $(m \times n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, которая получается из матрицы A умножением всех элементов на α :

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Произведением AB ($m \times n$) – матрицы $A = (a_{ij})$ на ($n \times k$) – матрицу $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$ – матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i – ой строки матрицы A и j – го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k).$$

Заметим, что число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B .

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется, т.е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Сумма нулевой матрицы O и произвольной матрицы A дает матрицу A :

$$A + O = A.$$

Единичной матрицей называется матрица вида

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Вычислить 1) $A + B$; 2) $2A$; 3) $A \cdot B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$1) A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3 & -2+4 \\ 5+2 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix},$$

$$2) 2A = 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -4 \end{bmatrix},$$

$$3) A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

Введем понятие определителя (или детерминанта) матрицы. *Определителем матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

порядка $n > 1$ называется число $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$, где

M_{1k} — определитель порядка $(n-1)$, полученный из матрицы A вычеркиванием первой строки и k -го столбца. Число M_{1k} называется дополнительным минором элемента a_{1k} .

Применим данное определение к матрицам 2-го и 3-го порядков. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$. Аналогично для матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

получим

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что понятие определителя имеет смысл только для квадратных матриц.

В дальнейшем умение вычислять определители понадобится нам для решения систем линейных уравнений методом Крамера.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Матрица A , составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а матрица

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

называется *расширенной матрицей системы*.

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система (1) называется *однородной*.

Числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ называются *решением системы линейных уравнений*, если будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Введем понятие ранга матрицы.

В матрице A размером $(m \times n)$ минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю или миноров порядка $r+1$ вообще нет.

Рангом матрицы называется порядок базисного минора (обозначение $\text{rang } A$).

Проще всего находить ранг матрицы и ее базисный минор при помощи *элементарных преобразований*, к которым относятся:

- 1) замена строк столбцами, а столбцов - соответствующими строками;
- 2) перестановка строк матрицы;
- 3) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;

- 4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
- 5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Важное значение имеет **теорема**: элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются *эквивалентными* (пишут: $A \sim B$).

Если при помощи нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований перейти от матрицы A к некоторой другой матрице A_1 , то $\text{rang} A = \text{rang} A_1$. Вычислив ранг A_1 мы тем самым будем знать и ранг A . Оказывается, что от любой матрицы A можно перейти к такой матрице A_1 , вычисление ранга которой не представляет затруднений; для этого следует добиться, чтобы в A_1 было достаточно много нулей

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы, имеющие вид (4) называются *треугольными*.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разберем преобразования матрицы A :

- 1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-4) , к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-7) , к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-10) ;
- 2) разделим все элементы второй строки на (-3) , третьей на (-7) , четвертой строки на (-9) ;
- 3) к третьей и четвертой строкам прибавим вторую, умноженную на (-1) ;
- 4) вычеркнем третью и четвертую строки, состоящие только из нулей;

В результате данных преобразований остались две различные строки.

В качестве базисного минора возьмем определитель $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Его порядок равен двум, а определителей третьего порядка составить уже нельзя, следовательно, $\text{rang} A = 2$.

Вопрос о совместности системы (1) полностью решается следующей теоремой:

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности т.е.

$$\text{rang} A = \text{rang} A^* = r$$

тогда:

1) если $r = n$, то система имеет единственное решение;

2) если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений, а именно, некоторым $n - r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.

Рассмотрим далее некоторые методы решения систем линейных уравнений.

1. ПРАВИЛО КРАМЕРА.

Если в системе (1) $m = n$ и $\det A \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение и

$$x_i = \Delta_i / \det A, \quad (5)$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя матрицы A заменой i -го столбца на столбец свободных членов. Формулы (5) носят названия формул Крамера.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера (задача 1.1–1.20)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$\begin{aligned} \Delta = \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 3(0 - 5) - 2(0 - 1) + (10 + 1) = -15 + 2 + 11 = -2. \end{aligned}$$

Так как $\Delta = -2 \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Вычислим Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(0 - 5) - 2(0 + 3) + (30 - 3) = -25 - 6 + 27 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0 + 3) - 5(0 - 1) + (-6 - 6) = 9 + 5 - 12 = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3 - 30) - 2(-6 - 6) + 5(10 + 1) = -81 + 24 + 55 = -2.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Таким образом, получили $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Проверка:
$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 = 5, \\ 2 \cdot 2 + 1 + 1 = 6, \\ 2 - 5 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

2. МЕТОД ГАУССА.

Пусть задана система (1). Для того чтобы решить систему (1) методом Гаусса, надо данную систему привести к треугольному виду, а затем обратным ходом последовательно вычислить неизвестные.

На практике рациональнее преобразовывать не саму систему, а ее расширенную матрицу. Расширенную матрицу системы приводим с помощью элементарных преобразований к виду, когда все элементы, стоящие ниже главной диагонали равны нулю.

Метод Гаусса является одним из универсальных методов нахождения решения системы линейных уравнений. Его универсальность заключается в том, что он позволяет установить не только совместность или несовместности системы, но и найти решение совместной системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу A^* и приведем ее к треугольному виду (4):

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Разберем преобразование матрицы A^* :

1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2) , к третьей строке прибавим первую;

2) сократим третью строку на 2;

3) к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-1) ;

4) сократим третью строку на (-3) .

Мы видим, что $\text{rang} A = \text{rang} A^* = 3$, т. к. базисный минор

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Число неизвестных $n = 3$. Следовательно, система

совместна и имеет единственное решение. Найдём его методом Гаусса, для этого запишем систему, соответствующую преобразованной матрице A^*

(укороченная система):
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Откуда получим: $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. Проверка:
$$\begin{cases} 2 - 1 - 2 = -1, \\ 4 - 1 - 1 = 2, \\ -2 + 3 + 2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

- 1) проверяем условие $\text{rang } A = \text{rang } A^* = r$ (если $\text{rang } A \neq \text{rang } A^*$, то система не имеет решения);
- 2) выбираем базисный минор порядка r и записываем укороченную систему;
- 3) неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ назовем базисными, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ свободными и выразим базисные неизвестные через свободные;
- 4) записываем общее решение системы.

Пример. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и одно частное решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. ее расширенная матрица A^* получается добавлением к основной матрице A нулевого столбца и, следовательно, всегда $\text{rang } A = \text{rang } A^*$.

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ всегда является решением однородной системы (тривиальное решение).

Для существования нетривиального (ненулевого) решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang } A = r < n$.

Найдем ранг матрицы A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Разберем преобразования матрицы A :

1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3) , к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4) , к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-3) ;

2) разделим элементы второй строки на (-1) , элементы третьей строки на (-3) , а элементы четвертой строки на 2;

3) из третьей и четвертой строк вычтем вторую строку.

Выберем в качестве базисного минора

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $\text{rang } A = 2$ и система имеет ненулевые решения.

Запишем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 (т. к. в базисный минор выбраны 1-й и 2-й столбцы), тогда x_3 и x_4 - свободные неизвестные. Полагая $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, находим x_1 и x_2 .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4c_3 + 3c_4 \\ x_2 = -6c_3 + 5c_4 \end{cases}.$$

Подставим x_2 в первое уравнение системы и найдем x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 + 2(-6c_3 + 5c_4) &= -4c_3 + 3c_4, \\ x_1 &= 12c_3 - 10c_4 - 4c_3 + 3c_4 = 8c_3 - 7c_4. \end{aligned}$$

Запишем общее решение системы

$$X(c_3, c_4) = \begin{pmatrix} 8c_3 - 7c_4 \\ -6c_3 + 5c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим любое частное решение. Например, полагая $c_3 = 1$, $c_4 = 0$, получим $x_1 = 8$, $x_2 = -6$. Таким образом, частное решение системы имеет вид: $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.

Варианты контрольных заданий для контрольной работы № 1

Элементы линейной алгебры

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если задан многочлен $f(x)$ и матрица A

1.1. $f(x) = -2x^2 + 3x + 8$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5. $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.6. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$1.7. f(x) = 2x^2 + x - 2, A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

,

$$1.8. f(x) = 5x^2 + 3x - 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. f(x) = 3x^2 - 2x + 5, A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. f(x) = x^2 - x + 2, A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.11. f(x) = 4x^2 - 2x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. f(x) = -3x^2 + 5x + 8, A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. f(x) = 5x^2 - 2x + 2, A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. f(x) = 2x^2 - 3x + 5, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.15. f(x) = 8x^2 - x + 7, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.16. f(x) = 2x^2 - 3x - 5, A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.17. f(x) = 2x^2 + 8x + 2, A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.18. f(x) = 7x^2 + 3x - 1, A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

,

$$1.19. f(x) = 4x^2 + x - 2, A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.20. f(x) = 5x^2 - 7x + 1, A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц AB и BA :

$$2.1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.5. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.7. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.8. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.9. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -11 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.11. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.12. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.13. A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.14. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.15. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.16. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.17. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.18. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.19. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.20. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы A из задания 2, соответствующего варианта.

4. Доказать совместность системы линейных уравнений и решить ее двумя методами: 1) Крамера; 2) матричным.

$$4.1. \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -10. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -13. \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$$

1. Найти общее и одно частное решение неоднородной системы линейных уравнений, записать фундаментальную систему решений.

$$5.1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \quad 5.2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
5.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases} & 5.4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 4, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \\
5.5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 1. \end{cases} & 5.6. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 2. \end{cases} \\
5.7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & 5.8. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases} \\
5.9. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 3. \end{cases} & 5.10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 3. \end{cases} \\
5.11. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases} & 5.12. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 3. \end{cases} \\
5.13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases} & 5.14. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases} \\
5.15. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases} & 5.16. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases} \\
5.17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -2, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 1. \end{cases} & 5.18. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 1. \end{cases} \\
5.19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 1. \end{cases} & 5.20. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}
\end{array}$$

Кривые второго порядка

В декартовой системе координат общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (*)$$

где не все коэффициенты A , B и C одновременно равны нулю. Если $A = B = C = 0$, то уравнение $Dx + Ey + F = 0$ определяет прямую линию.

В декартовой системе координат уравнение (*) примет один из следующих видов:

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R ;

2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и полуосями a и b ;

3) канонические уравнения гиперболы:

а) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0, y_0)$, действительной полуосью a и мнимой полуосью b ;

б) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0, y_0)$, действительной полуосью b и мнимой полуосью a ;

4) канонические уравнения параболы:

а) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ – каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(x_0, y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси OX .

б) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ – каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(x_0, y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси OY .

Используя каноническое уравнение кривой, легко построить график данной линии в декартовой системе координат.

Пример. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду. Определить вид кривой и построить ее график.

$$\text{а) } 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0,$$

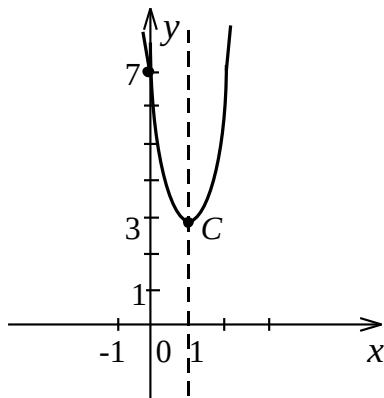
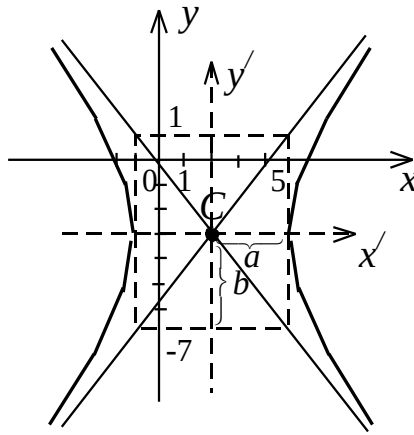
$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0,$$

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 = 0,$$

$$16(x^2 - 2x \cdot 2 + 4) - 64 - 9(y^2 + 2y \cdot 3 + 9) + 81 - 161 = 0,$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 = 144.$$

Разделим обе части уравнения на 144: $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$. Данное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(2, -3)$, действительной полуосью $a = 3$ и мнимой полуосью $b = 4$. Сделаем схематический чертеж.



б) $y = 4x^2 - 8x + 7,$

$$y = 4(x^2 - 2x) + 7, \quad y = 4(x^2 - 2x \cdot 1 + 1) - 4 + 7,$$

$$y = 4(x - 1)^2 + 3,$$

$y - 3 = 4(x - 1)^2, \quad (x - 1)^2 = \frac{1}{4}(y - 3)$ – парабола с вершиной в точке $C(1, 3)$ и осью симметрии, параллельной оси OY .

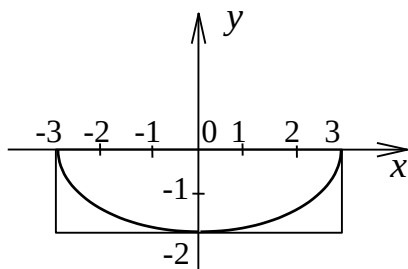
в) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}.$

Преобразуем это уравнение, возведя обе части в квадрат

$$y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2), \quad \frac{y^2}{4} = \frac{9 - x^2}{9}, \quad \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с центром в точке $O(0, 0)$ и полуосями $a = 3, b = 2$. Если решить данное уравнение относительно y , получим

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \quad y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$



В условии задачи дано второе из этих уравнений. Оно определяет не весь эллипс, а только ту его часть, для точек которой $y \leq 0$, т.е. половину эллипса, расположенную ниже оси OX .

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Всякое уравнение первой степени относительно x и y , т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

где A , B и C - постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то разрешив его относительно y , получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \quad (7)$$

где $k = -\frac{A}{B}$ - тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси OX ; $b = -\frac{C}{B}$ - ордината точки пересечения прямой с осью OY .

Уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (8)$$

является уравнением прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k .

Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все члены на $-C$, получим уравнение прямой «в отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (9)$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ - величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на осях координат OX и OY , соответственно.

Уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (10)$$

является уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Обозначим $x_2 - x_1 = a_1$, $y_2 - y_1 = a_2$ координаты направляющего вектора прямой $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, тогда (10) примет вид

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad (11)$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой. Уравнение (11) называется *каноническим уравнением прямой*. Введя параметр t , из (10) получим *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, \text{ где } 0 \leq t < \infty \quad (12)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (13)$$

Вектор $\bar{N}$ – называется *нормальным вектором прямой*. Раскрывая в (13) скобки, получим общее уравнение прямой

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Таким образом, в общем уравнении прямой, коэффициенты при x и y суть координаты нормального вектора прямой.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Возможны следующие случаи их взаимного расположения:

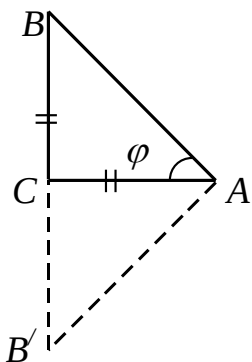
1) прямые параллельны (в частности совпадают) тогда и только тогда, когда выполняется условие $k_1 = k_2$;

2) прямые пересекаются в некоторой точке, тогда угол между ними находится по формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$;

3) прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны декартовы координаты вершины острого угла $A(2, 1)$ и уравнение противоположного катета BC : $x - 2y + 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон этого треугольника.

Решение.



Найдем уравнение прилежащего катета. Так как $AC \perp BC$, CB : $x - 2y + 1 = 0$, то уравнение CA имеет вид

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2} \Rightarrow 2x + y - 5 = 0. \quad (k_1 = -2)$$

Угол между катетом и гипотенузой в равнобедренном треугольнике φ равен 45° . Для нахождения уравнения гипотенузы

воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, из которой

найдем угловой коэффициент прямой AB .

$$1. \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_2 + 2}{1 - 2 \cdot k_2} \Rightarrow 1 = \frac{k_2 + 2}{1 - 2k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}.$$

Тогда уравнение AB имеет вид

$$y - y_A = k_2(x - x_A) \Rightarrow (y - 1) = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow x + 3y - 5 = 0.$$

$$2. \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{-2 - k_1}{1 - 2 \cdot k_1} \Rightarrow 1 = \frac{-2 - k_1}{1 - 2k_1} \Rightarrow k_1 = 3.$$

Тогда уравнение AB' : $(y - 3) = 3(x - 2) \Rightarrow 3x - y - 5 = 0.$

Ответ: AC : $2x + y - 5 = 0$, AB : $x + 3y - 5 = 0$, AB' : $3x - y - 5 = 0.$

Прямая и плоскость в пространстве

Плоскость в декартовой системе координат может быть задана следующими уравнениями:

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Кроме того,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$.

2. Уравнение плоскости “в отрезках”

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях OX, OY и OZ , соответственно.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Прямая в пространстве задается:

1) общими уравнениями L в пространстве в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$, таким образом, прямая задана как линия пересечения двух плоскостей.

2) каноническими уравнениями L в $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, а $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ – направляющий вектор.

3) параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Варианты контрольных заданий для контрольной работы № 2

Элементы аналитической геометрии

1. В соответствии с вариантом выполнить следующие задания.

- 1.1. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин: $A(1, 2), B(2, 3), C(1, 3)$.
- 1.2. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 4 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $(1, 1)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.
- 1.3. Даны вершины треугольника $A(1, -2), B(-1, 1)$ и точка пересечения его высот $(8, -1)$. Составить уравнения сторон треугольника.
- 1.4. Даны вершины треугольника: $A(1, 2), B(-2, 0), C(-1, 1)$. Найти длины его высот.
- 1.5. Составить уравнения сторон квадрата, если известны одна из вершин $(2, 1)$ и точка пересечения диагоналей $(-1, 0)$.
- 1.6. Даны уравнения сторон прямоугольника $x - 3y + 2 = 0$, $3x + y - 1 = 0$ и одна из его вершин $(-1, 2)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
- 1.7. Даны уравнения сторон параллелограмма $x + y - 1 = 0$, $2x - 3y + 2 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x - y + 1 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.
- 1.8. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух других его сторон $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + y - 1 = 0$.
- 1.9. Составить уравнения сторон треугольника, если заданы две его вершины $A(1, 2), B(-2, 3)$ и точка пересечения медиан $(0, -1)$.
- 1.10. Даны вершины треугольника: $A(1, -1), B(2, 3), C(-1, 2)$. Составить уравнения его высот.
- 1.11. Даны две смежные вершины квадрата $A(1, -3), B(2, 1)$. Составить уравнения его сторон.
- 1.12. Составить уравнения сторон и высот треугольника с вершинами в точках: $A(2, -1), B(0, 2), C(-1, 3)$.

- 1.13. Даны две стороны прямоугольника $x + 3y - 1 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$ и уравнение его диагонали $2x - y + 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.
- 1.14. Составить уравнения сторон и высот треугольника с вершинами в точках: $A(2,1), B(-1,2), C(3,2)$.
- 1.15. Три последовательные вершины параллелограмма имеют координаты: $A(2,1), B(-1,3), C(1,-2)$. Составить уравнения диагоналей этого параллелограмма.
- 1.16. Составить уравнения сторон и найти внутренние углы треугольника с вершинами в точках: $A(2,-1), B(1,2), C(-3,1)$.
- 1.17. Дан треугольник с вершинами в точках: $A(2,-1), B(3,1), C(-2,2)$. Составить уравнения его высот и медиан.
- 1.18. Даны вершины треугольника $A(-2,3), B(1,2)$ и точка пересечения его медиан $M(2,4)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.
- 1.19. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения его двух сторон $x + 3y - 1 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$ и одна из его диагоналей $2x - y - 1 = 0$.
- 1.20. Найти точку пересечения высот треугольника с вершинами в точках: $A(2,3), B(-1,2), C(1,-3)$.

2. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду. Определить вид кривой и построить ее график.

2.1 $4x^2 - 8x + y^2 - 4y + 4 = 0.$

2.2 $9x^2 + 18x + 4y^2 - 8y - 23 = 0.$

2.3 $4x^2 - 4x - 4y + 9 = 0.$

2.4 $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y - 11 = 0.$

2.5 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0.$

2.6 $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0.$

2.7 $2x^2 + 8x - y^2 + 4y + 6 = 0.$

2.8 $x^2 + x + y^2 - y - 1/2 = 0.$

2.9 $4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 = 0.$

2.10 $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0.$

2.11 $2x^2 - 6x - 4y - 1 = 0.$

2.12 $x^2 - 2x - y^2 + 2y - 12 = 0.$

- 2.13 $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 34 = 0.$
- 2.14 $16x^2 + 64x + 9y^2 - 18y - 71 = 0.$
- 2.15 $2x^2 + 20x - 5y + 55 = 0.$
- 2.16 $4x^2 - 24x - 3y^2 - 6y + 45 = 0.$
- 2.17 $x^2 - x + y^2 - y + 1/4 = 0.$
- 2.18 $4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 = 0.$
- 2.19 $x^2 + 6x - 2y + 11 = 0.$
- 2.20 $-x^2 + 4x + 2y^2 - 4y - 6 = 0.$

Литература обязательная

1. Арефьев К. П., Ивлев Е. Т., Тарбокова Т. В. Системы линейных уравнений: учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 1996.
2. Высшая математика. Часть I: учебное пособие / К. П. Арефьев, А. И. Нагорнова, Е. И. Подберезина, Г. П. Столярова, А. Н. Харлова. – Томск: Изд. ТПУ, 2004. – 188 с.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в примерах и задачах. Часть I. – М.: Высшая школа, 1980.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1985.
6. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Часть I. – М., 1971.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 429 с.
8. Сборник задач по математике для ВТУЗов / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. Часть I. – М.: Наука, 1981. – С. 9–10.
9. Краткий курс высшей математики. Т. 1. / В. Е. Шнейдер и др. – М.: Высшая школа, 1978.

Методические указания к выполнению контрольной работы № 3

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Число y_0 называется *пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0* , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех x , отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|y_0 - f(x)| < \varepsilon$.

Если y_0 есть предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ или $f(x) \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$.

Число y_1 называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева* (пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = y_1$), если $f(x)$ стремится к пределу y_1 при x , стремящемся к

числу x_0 так, что принимает только значения, меньшие x_0 . Если x принимает только значения, большие x_0 , то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = y_2$ и

называют y_2 *пределом функции $f(x)$ в точке x_0 справа*.

При вычислении пределов функций используются следующие теоремы:

Если каждая из функций $y = f(x)$ и $g = \varphi(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$, то сумма, разность и произведение этих функций также имеет конечный предел, причем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \pm \varphi(x)| &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \cdot \varphi(x)| &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),\end{aligned}$$

Если, кроме того, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет конечный

предел, причем $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$.

Следствие:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ где } C = \text{const.}$$

1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ и m – натуральное число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m.$$

Кроме того, при вычислении пределов нужно обратить внимание на то, что элементарные функции непрерывны там, где они определены, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{4x - 2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{4x - 2} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow x_0} x^3 + \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow x_0} x + 1}{4 \lim_{x \rightarrow x_0} x - 2} = \frac{2 \cdot 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 + 1}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{1}{2}$$

Однако, бывают случаи, когда теоремы о пределах суммы, частного и произведения неприменимы, т.к. при вычислении пределов получаются

неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (1^\infty), (0^0), (\infty - \infty), (\infty^0)$.

Для вычисления таких пределов функцию $f(x)$ заменяют функцией $f_1(x)$, принимающей в окрестности точки x_0 те же значения, что и $f(x)$ и определенной в точке x_0 . Пределы таких функций равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f(x_0).$$

Рассмотрим простейшие приемы раскрытия неопределенностей и нахождения пределов функций.

Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Рассмотрим предел дробно-рациональной функции, когда при $x \rightarrow x_0$ и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

Решение.

Непосредственный переход к пределу по формуле (1), дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, т.е. функция в точке $x_0 = 2$ неопределена. Для решения задачи поступим следующим образом, разделим числитель и знаменатель дроби на $(x - 2)$, получим

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)}, \quad x \neq 2.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3 - 8)}{(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)} = \frac{2^2 + 4 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3.$

Сформулируем **правило**.

Для того, чтобы найти предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \rightarrow x_0$ и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $(x - x_0)$ и перейти к пределу $x \rightarrow x_0$ в полученном выражении. Если и после этого неопределенность сохраняется, то надо произвести повторное деление на $(x - x_0)$.

Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения.

Пример. Найти. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}.$

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(2 + \sqrt{x+4})$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{(2 - \sqrt{x+4})(2 + \sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{4 - (x+4)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-(2 + \sqrt{x+4}) \right) = -4.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3}.$

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^3} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1 \right)}{x^3 \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1 \right)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3-1)}{x^3 \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3 \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1 \right)} = \frac{1}{3}.$$

Правило. Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, в случае, когда пределы числителя и знаменателя дроби равны нулю, надо освободиться от имеющихся иррациональностей, после этого

сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение одинаковых множителей и т. п.) и перейти к пределу при $x \rightarrow x_0$ в полученном выражении.

Замечание. В этом случае используются формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}$$

Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим предел при $x \rightarrow \infty$ отношения двух многочленов

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

В данном случае теорема о пределе дроби неприменима, т.к. пределы числителя и знаменателя не существуют.

Преобразуем дробь следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} &= \frac{x^n(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{x^m(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \\&= \frac{x^{n-m}(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)};\end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \frac{a_0}{b_0}$;

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

Тогда
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-m}(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ a_0/b_0, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Правило. Чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные бесконечности, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наибольшей степени, встречающейся в членах дроби, а затем перейти к пределу.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 8/x + 4/x^2 + 1/x^3 - 7/x^4}{3 + 2/x^2 + 10/x^4} = \frac{15}{3} = 5.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^2 + 100x + 1}{0.1x^5 + 0.3x^3 + 0.01}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^2 + 100x + 1}{0.1x^5 + 0.3x^3 + 0.01} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000/x^3 + 100/x^4 + 1/x^5}{0.1 + 0.3/x^2 + 0.01/x^5} = \frac{0}{0.1} = 0.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 12}{x + 5}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 12}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 12/x^2}{1/x + 5/x^2} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональности. При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которую раскрывают по правилу, указанному в предыдущем пункте, т.е. делят числитель и знаменатель дроби на x в высшей степени, а затем переходят к пределу при $x \rightarrow \infty$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 3}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2/x^2 + 5/x^2}}{x/x + 3/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 5/x^2}}{1 + 3/x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Первый замечательный предел

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ от функций, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции используют первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

и следствия из него

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Примеры.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} x/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2} \cdot \frac{3x}{x/2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x/2} = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Замечание. В этом примере использована формула тригонометрии

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x + \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Для раскрытия неопределенностей вида (1^∞) используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + t)^{1/t} = e$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3/x}{1-2/x}\right) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) = \infty$.

Таким образом, имеем неопределенность (1^∞) . Воспользуемся вторым замечательным пределом, для этого преобразуем сначала выражение, стоящее в скобках, а именно, добавим и вычтем единицу

$$\left(1 + \left(\frac{x+3}{x-2} - 1\right)\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{x+3-x-2}{x-2}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{(x-2)/5}\right)^{2x+1}$$

Теперь показатель степени $(2x+1)$ домножим и разделим на дробь $\frac{x-2}{5}$,

получим
$$\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5}\right)^{\frac{x-2}{5} \cdot (2x+1) \cdot \frac{5}{x-2}}.$$

Перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{\frac{(2x+1)}{x-2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x+1)}{x-2}} = e^{10},$$

так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10x+5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10+5/x)}{1-2/x} = 10.$

Непрерывность функций

Определение 1. Функция $y = f(x)$ с областью определения D

называется непрерывной в точке x_0 , если выполнены следующие условия:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 , т.е. $x_0 \in D$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Условие пункта 2 эквивалентно существованию равных односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$.

При исследовании функции на непрерывность пользуются следующей **теоремой**:

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b) , где $a < b$, то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

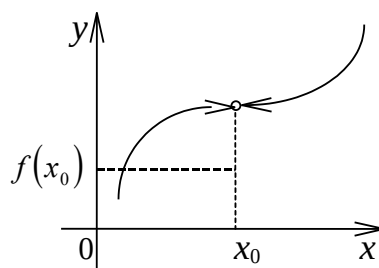
Следовательно, функция может иметь разрыв в точках, где она меняет способ своего задания или не определена.

Существуют следующие виды точек разрыва.

1. Если в точке x_0 существует конечный предел функции $f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

то такая точка называется точкой



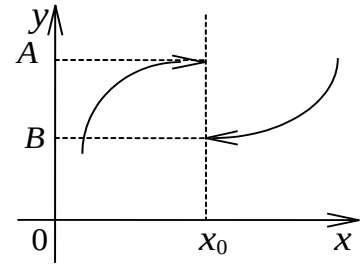
разрыва I рода (устранимый разрыв).

2. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода (точка скачка) функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции

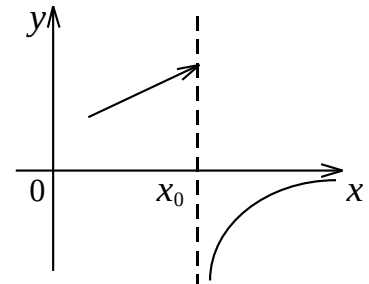
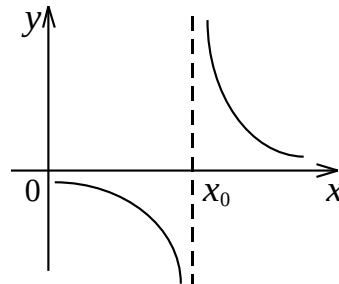
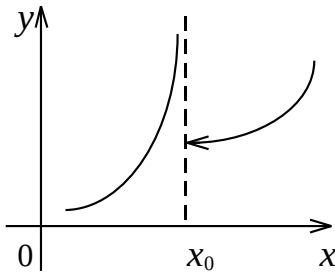
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B, \quad (A, B - \text{const}),$$

но они не равны между собой.



3. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода или точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности ($\pm\infty$).



Пример. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2, \\ x, & \text{при } x > 2. \end{cases},$$

Данная функция определена на всей числовой оси. Она задана двумя различными формулами для интервалов $(-\infty; 2]$ и $(2; +\infty)$ и может иметь разрыв в точке $x_0 = 2$, где меняется способ ее задания. Найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -2,$$

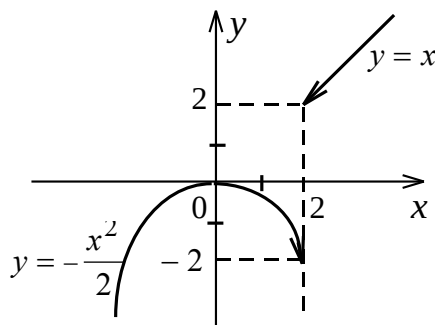
так как слева от точки $x_0 = 2$ функция $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 + 0} x = 2,$$

так как справа от точки $x_0 = 2$ функция $f(x) = x$.

Таким образом, в точке $x_0 = 2$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, но они не равны между собой $-2 \neq 2$.

Следовательно, $x_0 = 2$ - точка разрыва I рода (точка скачка). Во всех остальных точках числовой оси данная функция непрерывна, так как формулы, которыми она задана определяют элементарные непрерывные функции. Построим график этой функции.



$$\text{б) } y = \frac{1}{x^2 - 25}$$

Функция y определена для всех значений кроме $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$. Эта функция элементарная, значит, она непрерывна во всей области своего определения $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$. В точках $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ функция y имеет разрывы, так как нарушается первое условие непрерывности. Чтобы определить характер разрыва в этих точках, найдем односторонние пределы

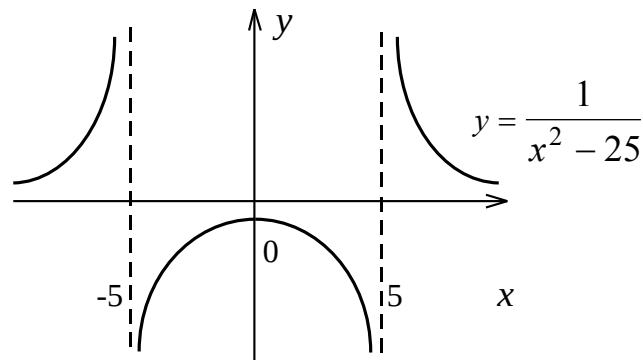
$$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{1}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(5-0-5)(5-0+5)} = \left(\frac{1}{-0 \cdot 10} \right) = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{1}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(5+0-5)(5+0+5)} = \left(\frac{1}{+0 \cdot 10} \right) = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5-0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow -5-0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(-5-0-5)(-5-0+5)} = \left(\frac{1}{-10 \cdot (-0)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5+0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow -5+0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{(-5+0-5)(-5+0+5)} = \left(\frac{1}{-10 \cdot (+0)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Поскольку все односторонние пределы равны бесконечности, функция $y = \frac{1}{x^2 - 25}$ терпит в точках $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ разрывы II рода. Построим график функции



в) $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$.

Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x_0 = -1/2$. Из этого следует, что в точке $x_0 = -1/2$ функция y имеет разрыв. Найдем односторонние пределы

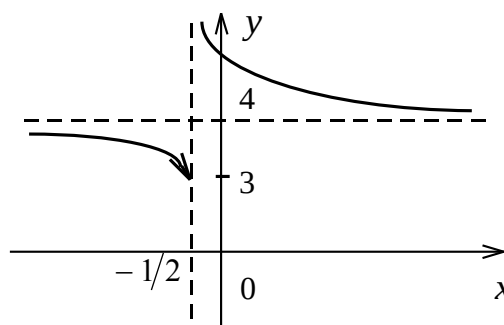
$$\lim_{x \rightarrow -1/2 - 0} \left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2 \cdot (-1/2 - 0) + 1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{-0}} \right) = \left(3 + e^{-\infty} \right) =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{e^{\infty}} \right) = \left(3 + \frac{1}{\infty} \right) = (3 + 0) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1/2 + 0} \left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2 \cdot (-1/2 + 0) + 1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{+0}} \right) = \left(3 + e^{+\infty} \right) =$$

$$= (3 + \infty) = \infty.$$

Так как предел справа в точке $x_0 = -1/2$ равен бесконечности, заключаем, что x_0 – точка разрыва II рода. Построим график функции $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$



Варианты контрольных заданий для контрольной работы № 3

Введение в анализ

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1.1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{x^3 + 2x^2 + 9x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2+2}{x}}$;

1.2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 25}{3x^3 + 2x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 4x}{x^3 + x - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{x+1}$;

1.3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt[3]{2x^3 + 1}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{1 - \sqrt{x-1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{10x^3 + 6x + 16}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{2x+3}$;

1.4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^6 + 2} + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+1} \right)^{x-1}$;

1.5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 2x + 1}{7x^2 + 5x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 - 2x^2 - x - 6}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{3x-1}$;

1.6. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 4}{x^2 + 3x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x+3} - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - x^2 + 2x - 8}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 \cos x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-5} \right)^{4x+1}$;

$$1.7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3+1}-3}{x^2-3x+2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+7x^2+8x+3};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x^2}{1-x^2} \right)^{3x^2+1};$$

$$1.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+3x^2+x-1}{x^3+5x+6}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-4x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+x-4}{1+x^2-2x^3};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{x+3};$$

$$1.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^5-1}-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3+x} \right)^{\frac{3x^2+1}{x}};$$

$$1.10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{2x+\sqrt{x^2+5}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+3x-3};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{6+x^2} \right)^{\frac{x^3-1}{x}};$$

$$1.11. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3+2x^2-1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{x^3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{18+9x-2x^2-x^3}{x^3+x^2-2x};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}; \alpha, \beta - \text{ числа}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{2+3x} \right)^{\frac{x^2+2}{x}};$$

$$1.12. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+1}+x}{(3x+1)^2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-2x^2+x^3-4}{9x^2-5x^3+2x};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x \sin x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{1+x^2} \right)^{\frac{x^3}{x-1}};$$

$$1.13. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+1}+x^2}{(x+1)^2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-16}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3x^2+x^3+3}{x^3+5x^2+3x-9};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{5}};$$

$$1.14. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+1}{x^3+4x^2-2x+7}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2-9x+5}{3x^3-10x^2+11x-4}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin 6x}{x+\operatorname{tg} 3x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-3} \right)^{\frac{x^3+1}{4x}};$$

$$1.15. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{2x^3-3x+10}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x-6x^2+2x^3}{x^3-2x^2-9}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{\frac{5x+1}{2}};$$

$$1.16. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{3x^3-3x^2+5x-5};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1-\cos 2x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\cos 2x - \cos x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x-3} \right)^{\frac{3x-1}{4}};$$

$$1.17. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+x^2+1}{4x^3+2x^2+3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-5x+6)^2}{x^3-3x^2+4};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x^2}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+7} \right)^{x+3};$$

$$1.18. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^4+1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{3+x^2}-2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+4x^2+12x+9}{7x^3+7x^2+2x+2};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1-\cos 2x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x(1-\cos 4x)}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1-\cos 2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{\frac{5x+1}{2}};$$

$$1.19. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+9x+14}{7x^3+14x^2+2x+4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 4x}{\cos 6x - 1}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x+3} \right)^{\frac{2x-1}{3}};$$

$$1.20. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + x + 5}{x^3 + 2x + 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{6+x}-3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3-8)}{x^3-3x^2+4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 3x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{x^2}.$$

2. Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность, найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

$$2.1. \text{ а) } y = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 + 2^{\frac{1}{1-x}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x(x-2)};$$

$$2.2. \text{ а) } y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 4, \\ 2\sqrt{2}, & x \geq 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 5^{\frac{4}{x+3}}; \quad \text{в) } y = \frac{x}{x^2-1};$$

$$2.3. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \\ 4, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 2^{-\frac{1}{3x+2}}; \quad \text{в) } y = \frac{1+x}{4-x^2};$$

$$2.4. \text{ а) } y = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ 1-x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 3^{\frac{1}{2x+3}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x^2+5x+6};$$

$$2.5. \text{ а) } y = \begin{cases} 3x+1, & x \leq 0, \\ 1-x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 2+x, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 2 + 9^{\frac{1}{x+1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{9-x^2};$$

$$2.6. \quad \text{a) } y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ -x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 2^{\frac{-1}{1-3x}}; \quad \text{в) } y = \frac{3}{2x^2 - x};$$

$$2.7. \quad \text{a) } y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 1, \\ x, & 0 < x < 2, \\ 0, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = e^{\frac{1}{x-7}}; \quad \text{в) } y = \frac{2-x}{x^2-1};$$

$$2.8. \quad \text{a) } y = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4, \\ x, & x \geq 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 3 + 5^{\frac{1}{x+1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x^2-4};$$

$$2.9. \quad \text{a) } y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 1, \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi, \\ x, & x > \pi; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 + 2^{\frac{1}{3x-1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x^2+4x-5};$$

$$2.10. \quad \text{a) } y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & 1 < x \leq 4, \\ 6-x, & x > 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 + 2^{\frac{1}{4x+1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x^2+x-12};$$

$$2.11. \quad \text{a) } y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \\ 3-x, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = e^{\frac{-1}{2x+3}}; \quad \text{в) } y = \frac{x-1}{x^2-9};$$

$$2.12. \quad \text{a) } y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 4-x, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 9^{\frac{1}{2x+4}}; \quad \text{в) } y = \frac{x}{9-x^2};$$

$$2.13. \quad \text{a) } \begin{cases} 1/(x^2+1), & x \leq 0, \\ 1-x^2, & 0 < x < 1, \\ 1-x, & x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 7^{\frac{1}{3x+4}}; \quad \text{в) } y = \frac{2}{x(3-x)};$$

$$2.14. \text{ a) } y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1+x, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}+3, & x > 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 2 + 3^{\frac{-1}{x+1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x^2+x};$$

$$2.15. \text{ a) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 - 2^{\frac{1}{2-3x}} \quad \text{в) } y = \frac{1}{|x-1|};$$

$$2.16. \text{ a) } y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4, \\ (x-4)^2, & x > 4; \end{cases} \quad \text{б) } y = 4^{\frac{1}{2x+5}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{3+2x-x^2};$$

$$2.17. \text{ a) } y = \begin{cases} -x-2, & x < -2, \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 + 5^{-\frac{1}{2+x}}; \quad \text{в) } y = \frac{x}{4-x^2};$$

$$2.18. \text{ a) } y = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & x \leq 0, \\ 3\sin x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ \pi/4, & x \geq \pi/2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 - 3^{\frac{1}{2-3x}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{x(2x+3)};$$

$$2.19. \text{ a) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 2, \\ -1, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = 3 + 2^{\frac{1}{x+1}}; \quad \text{в) } y = \frac{1}{4x^2-1};$$

$$2.20. \text{ a) } y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = 1 + e^{\frac{1}{x+5}}; \quad \text{в) } y = \frac{x}{1-4x^2};$$

**Методические указания к выполнению
контрольной работы № 4**

Производная и правила дифференцирования

1. Пусть функция $y = f(x)$ получила приращение $\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx , при Δx , стремящимся к нулю, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x и обозначается y'_x , или f'_x , или $\frac{dy}{dx}$.

Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Задача 1. Используя определение, найти производные функций

а) $y = x$, б) $y = \frac{2}{x}$.

Решение: а) Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее значение функции $y(x + \Delta x) = x + \Delta x$, теперь найдем Δy
 $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Осталось вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $y' = (x)' = 1$.

б) пусть аргумент x получил приращение Δx , новому значению аргумента соответствует значение функции $y(x + \Delta x) = \frac{2}{x + \Delta x}$.

Найдем приращение Δy . $\Delta y = \frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x} = -\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{2}{x^2}$, $y' = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2(x^{-1})' = \frac{-2}{x^2}$.

Основные правила дифференцирования

Если $C = \text{const}$, а функции $U = U(x)$, $V = V(x)$ дифференцируемы, то

1. $(C)' = 0$;

4. $(UV)' = U'V + V'U$;

2. $(x)' = 1$;

5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$;

3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$;

6. $(CU)' = CU'$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1};$	10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0;$	11. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
3. $(\sin x)' = \cos x;$	12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x};$
4. $(\cos x)' = -\sin x;$	13. $(a^x)' = a^x \ln a;$
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	14. $(e^x)' = e^x;$
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
9. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(U)$ и $U = \varphi(x)$, т. е. $y = f[\varphi(x)]$, где y и U имеют производные, то $y' = f'_U U'_x$. Здесь $u = u(x)$ – промежуточный аргумент. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Задача 2. Найти производные функций:

а) $2x^3 + \frac{3}{x^2} - 6\sqrt[3]{x^5}$, б) $(x^5 - \ln x)^3$, в) $\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right)^6$, г) $e^{-2x} \cos x \ln \sin x$.

Решение: а) представим функцию в табличной форме как сумму степенных функций и затем только найдем производную.

$$y = 2x^3 + 3x^{-2} - 6x^{5/3},$$

$$y' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3(-2x^{-3}) - 6 \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} = 6x^2 - \frac{6}{x^3} - 10\sqrt[3]{x^2}.$$

б) введем промежуточный аргумент и затем воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$U = x^5 - \ln x, \quad y = U^3, \quad y' = 3U^2 \cdot U'_x = 3(x^5 - \ln x)^2 \cdot \left(5x^4 - \frac{1}{x}\right);$$

в) пусть $U(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$, где $\frac{x}{3} = V(x)$, тогда $U(x) = \operatorname{arctg} V$,

$$U' = \frac{1}{1+V^2} \cdot V'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}.$$

Окончательно: $y = U^6$, $y' = 6U^5 \cdot U'_x = 6\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right)^5 \cdot \frac{3}{9+x^2}$;

г) правило 4 можно распространить на любое число сомножителей, если перемножаемые функции дифференцируемы.

$y = U(x) \cdot V(x) \cdot Z(x)$, $y' = U' \cdot V \cdot Z + U \cdot V' \cdot Z + U \cdot V \cdot Z'$, в данном случае

$U = e^{-2x}$, $U' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$, $V = \cos x$, $V' = -\sin x$,

$Z = \ln \sin x$, $Z' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$y' = e^{-2x}(-2 \cos x \ln \sin x - \sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \operatorname{ctgx})$.

Дифференцирование сложной показательно-степенной функции $y = U^V$.

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции. Чтобы найти производную функции U^V предварительно прологарифмируем ее по основанию e : $\ln y = V \ln U$, теперь воспользуемся правилом 3 и 6

$$\frac{1}{y} y' = V'_x \cdot \ln U + V \cdot \frac{1}{U} \cdot U'_x, \text{ откуда } y' = U^V \cdot \left(V' \ln U + \frac{V}{U} U' \right) \quad (1)$$

Задача 3. Найти производные функций а) $(12+x)^{\sin x}$, б) $\sqrt[5]{\operatorname{tg}^5 x}$

Решение: а) воспользуемся формулой (1): Пусть $U = 12+x$, $V = \sin x$, найдем $U' = 1$, $V' = \cos x$ и подставим в формулу (1):

$$y' = (12+x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(12+x) + \frac{\sin x}{12+x} \cdot 1 \right)$$

б) сначала прологарифмируем $\ln y = \frac{5}{x} \ln \operatorname{tg} x = 5x^{-1} \ln \operatorname{tg} x$.

Дифференцируя левую и правую части равенства, получим:

$$\frac{y'}{y} = 5 \left(-x^{-2} \ln \operatorname{tg} x + x^{-1} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \right), \text{ теперь найдем } y'$$

$$y' = \frac{5}{x^2} (\operatorname{tg} x)^{\frac{5}{x}} \left(-\ln \operatorname{tg} x + \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} \right) = \sqrt[5]{\operatorname{tg}^5 x} \cdot \frac{5}{x^2} \left(\frac{2x}{\sin 2x} - \ln \operatorname{tg} x \right).$$

Метод, основанный на предварительном логарифмировании функции, не требует запоминания формулы и имеет более широкий спектр применения, в частности при дифференцировании большого количества сомножителей.

Задача 4. Найти производные функций:

$$\text{а) } \ln \sqrt[12]{\frac{e^{8x} x^{16}}{x^4 + 8}}, \quad \text{б) } \frac{(x-3)^3 \cdot e^{6x}}{(x+3)^2 \operatorname{tg}^5 x}.$$

Решение: а) воспользуемся свойствами логарифмической функции:

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^b = b \cdot \ln a, \quad \ln e = 1.$$

$$\text{Итак, } \ln y = \frac{1}{12} \left(8x + 16 \ln x - \ln(x^4 + 8) \right), \quad \frac{1}{y} y' = \frac{1}{12} \left(8 + \frac{16}{x} - \frac{4x^3}{x^4 + 8} \right),$$

$$y' = \frac{1}{3} \ln \sqrt{\frac{e^{8x} x^{16}}{x^4 + 8}} \cdot \left(\frac{2x + 4}{x} - \frac{x^3}{x^4 + 8} \right).$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством

$$\text{параметра } t: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}. \quad (2)$$

Пример 1. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Это параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиуса R .

Решение. Находим $\frac{dx}{dt} = -R \sin t$ и $\frac{dy}{dt} = R \cos t$.

$$\text{Отсюда } \frac{dy}{dx} = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Пример 2. Найти $\frac{dy}{dx}$ от функции: $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{tg}^2 3t$.

Решение: $x'_t = -3 \sin 3t$, $y'_t = 2 \operatorname{tg} 3t \cdot \frac{3}{\cos^2 3t}$, теперь по формуле (3)

$$\text{найдем } \frac{dy}{dx} = \frac{2 \operatorname{tg} 3t}{-\cos^2 3t \cdot \sin 3t} = \frac{-2}{\cos^2 3t} = -2 \sec^2 3t.$$

Производная неявной функции

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ не разрешено относительно функции $y(x)$, т.е. функция $y(x)$ задана неявно. Чтобы найти производную y'_x , надо продифференцировать левую и правую часть уравнения, учитывая, что y есть функция аргумента x . Рассмотрим это правило на примерах.

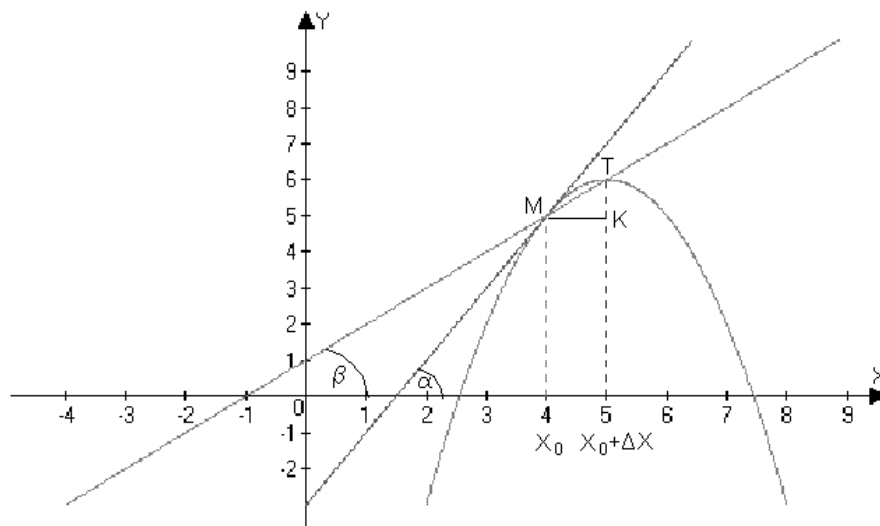
Пример 1. Найти y'_x , если а) $x^2 + y^2 = 1$, б) $\cos(x + y) = y^3$.

Решение: а) $2x + 2yy' = 0$, выразив y' , получим $y' = -\frac{x}{y} \cdot y'$;

б) дифференцируя обе части этого уравнения, получим уравнение относительно y' : $-\sin(x+y)(x+y)'_x = 3y^2 y'_x$,

$$-\sin(x+y)(1+y'_x) = 3y^2 y'_x; \text{ найдем теперь } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{3y^2 + \sin^2(x+y)}.$$

Геометрический смысл производной



Здесь α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ и точке $M(x_0, y_0)$. Через две точки $M(x_0, y_0)$ и $T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ кривой $y = f(x)$ проведем секущую MT , ее угловой коэффициент

$$k_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{TK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \text{ Двигая точку } T \text{ по кривой к точке } M, \text{ мы будем}$$

поворачивать секущую вокруг точки M , в результате секущая стремится занять положение касательной, проведенной к графику в точке, а угол β

стремится к углу α – наклона касательной, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$,

где k – угловой коэффициент касательной. Известное уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ используем как уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0) , с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Тогда $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (1) – уравнение касательной.

Задача. Найти уравнение касательной к графику функции

а) $y = 2 \sin^4 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$, б) $x = t^4 - t + 3$, $y = t^6 - 4$ в точке $t = 1$.

Решение. а) Сначала вычислим ординату точки касания

$$y_0 = y(x_0) = 2 \sin^4 \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = \frac{9}{8}. \text{ Затем производную в точке } x_0 = \frac{\pi}{6},$$

$$y' = \left[8 \sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \right]_{x=\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}. \text{ Это угловой коэффициент касательной.}$$

Подставим найденные параметры в уравнение (1)

$$y - \frac{9}{8} = 3\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \text{искомая касательная;}$$

б) кривая задана параметрически; найдем координаты точки касания, подставив значение параметра в уравнение кривой: $x_0 = 1 - 1 + 3 = 3$, $y_0 = 1 - 4 = 3$. Для отыскания углового коэффициента k воспользуемся

$$\text{формулой } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t^5}{4t^3 - 1}, \quad k = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{t=1} = \frac{6}{4-1} = 2, \text{ теперь запишем}$$

$$\text{уравнение касательной } y + 3 = 2(x - 3), \text{ или } 2x - y - 9 = 0.$$

Дифференциал функции и формула приближенного вычисления

Определение. Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная бесконечно малому приращению аргумента Δx , отличающаяся от соответственного приращения функции Δy на величину более высокого порядка.

По определению производной: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, откуда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) - \text{бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т. е.}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, где первое слагаемое и есть дифференциал

$$dy = f'(x)dx, \quad \Delta x = dx, \quad \Delta y \approx dy. \quad (4)$$

Определение дифференциала позволяет использовать его в приближенных вычислениях, заменив вычисление функции ее дифференциалом. Рассмотрим приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$, тогда $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. (5)

Это и есть формула приближенного вычисления. Ошибка, получаемая при приближенных вычислениях, есть бесконечно малая высшего порядка, чем приращение аргумента, т. к.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Задача 1. Найти дифференциалы функций:

$$\text{а) } (x^3 + 6x - 1)^5, \quad \text{б) } \operatorname{arctg} 8x, \quad \text{в) } 6^{\arcsin x}.$$

Решение: а) $dy = f'(x)dx$, найдем сначала

$$f'(x) = 5(x^3 + 6x - 1)^4 (3x^2 + 6) \text{ и затем } dy = 15(x^3 + 6x - 1)^4 (x^2 + 2)dx;$$

$$\text{б) } y' = \frac{1}{1+(8x)^2} (8x)' = \frac{8}{1+64x^2}, \quad dy = \frac{8dx}{1+64x^2};$$

$$\text{в) } y' = 6^{\arcsin x} \ln 6 (\arcsin x)' = 6^{\arcsin x} \frac{\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}, \quad dy = \frac{6^{\arcsin x} \ln 6}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задача 2. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - x$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0,1$. Вычислить абсолютную и относительную ошибки, которые получаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

$$\text{Решение } y + \Delta y = y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x), \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x - \Delta x - x^2 + x = [2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x]_{x=1, \Delta x=0,1} = 0,11;$$

$$dy = (x^2 - x)' dx = (2x - 1)dx, \quad [dy]_{x=1, \Delta x=0,1} = 0,1.$$

Абсолютная ошибка $|\Delta y - dy| = |0,11 - 0,1| = 0,01$, относительная ошибка

$$\frac{|\Delta y - dy|}{\Delta y} \cdot 100\% = \frac{0,01}{0,11} \cdot 100\% \approx 9\%.$$

Задача 3. Вычислить приближенно а) $\operatorname{ctg} 44^\circ$, б) $\sqrt{10}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (3) надо составить функцию $y = f(x)$ (по виду вычисляемого выражения) и выбрать начальные условия так, чтобы Δx было мало, а $f(x_0)$ можно было легко подсчитать. В случае а) выбираем $y = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = 45^\circ$,

$$\Delta x = x - x_0 = 44^\circ - 45^\circ = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \approx -\frac{3,142}{180}, \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

$$f'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = \left[\frac{-1}{\sin^2 x} \right]_{x=x_0} = -(\sqrt{2})^2 = -2, \quad f(x_0) = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 44^\circ \approx 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1 + \frac{3,142}{90} \approx 1,035;$$

б) чтобы Δx было мало, необходимо извлечь целую часть корня, т. е.

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}, \quad \text{откуда } x_0 = 1, \quad \Delta x = \frac{1}{9}, \quad f(x) = 3\sqrt{x},$$

$$f(x_0) = 3, \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0) = \frac{3}{2}, \quad \text{теперь вычислим приближенно } \sqrt{10}:$$

$$\sqrt{10} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} \approx \frac{19}{6} = 3,1(6) \approx 3,17.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 1. Производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной первого порядка и обозначается символом y'' или f'' , или $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Пример. $y = \sin^2 5x$, $y' = 2 \sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 5 \sin 10x$, $y'' = 50 \cos 10x$.

Определение 2. Производной n -го порядка называется производная первого порядка от производной $(n-1)$ -го порядка и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$, или $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Пример. $y = \ln(x+3)$. Найти $y^{(n)}(x)$.

$y' = \frac{1}{x+3} = (x+3)^{-1}$, $y'' = -(x+3)^{-2}$, $y''' = 1 \cdot 2 \cdot (x+3)^{-3} = 2!(x+3)^{-3}$,
 $y^{(4)} = -3!(x+3)^{-4}$, используя метод математической индукции, запишем формулу производной n -го порядка $y^{(n)} = (-1)^{n-1} (x+3)^{-n} (n-1)!$

Определение 3. Дифференциалом высшего порядка функции называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n$, в частности

$d^2 y = d(dy) = d(y' dx) = d(y') dx = y'' dx^2$, здесь $dx = \text{const}$.

Пример: $y = \arctg 2x$. Найти $d^2 y$.

$y' = \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2$, $y'' = -1 \cdot 2(1+4x^2)^{-2} \cdot 2 \cdot 4x = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}$;

Тогда $d^2 y = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} dx^2$.

Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.

Если $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то производные $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$, последовательно

могут быть вычислены по формулам:

$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ и т. д.

Для производной второго порядка имеет место формула

$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_x = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2}$.

Пример. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ от функции $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$

Решение. Найдем сначала $x'_t = 1 - \frac{\sin t}{\cos t} = 1 - \operatorname{tg} t$, $y'_t = 1 - \operatorname{ctg} t = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} t}$,

тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \operatorname{ctg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg} t$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{x'_t} = \frac{1}{\sin^2 t \cdot (1 - \operatorname{tg} t)}$.

4.2.5. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших существует и равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \text{ если выполняются условия:}$$

- 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и $\varphi(x) \neq 0$ в этой окрестности.
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ (или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$).
- 3) существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ конечный или бесконечный.

Здесь a может быть числом или одним из символов: $+\infty, -\infty, \infty$.

Задача 1. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x - \pi}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. а) Подставив предельное значение аргумента $x = \pi$, получаем неопределенность $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, т.к. $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\pi - \pi = 0$ и функции дифференцируемы.

Найдем $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x - \pi} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{(x - \pi)'} = \frac{1}{\cos^2 \pi} = 1$.

б) При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Применим правило

Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Полученный предел

снова представляет неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, применяя еще раз правило

Лопиталя, найдем $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$.

Другие виды неопределенностей $\{\infty - \infty\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$ можно свести к виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Задача 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right)$.

Решение. Подставим предельное значение аргумента, получим неопределенность $\{\infty - \infty\}$, которая легко сводится к частному:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/\cos^2 x}{\operatorname{tg} x + x/\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x + x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

4.2.6. Возрастание, убывание функции. Точки экстремума

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке $[a, b]$, если для любых $x_1 < x_2$ этого промежутка $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
Функция возрастающая (убывающая) называется монотонной.

Теорема 1. (Условие монотонности)

Если функция $f(x)$ 1) определена на $[a, b]$, 2) имеет конечную производную $f'(x)$ на (a, b) , тогда, чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Задача 1. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Область определения функции $D(f) = (-\infty, \infty)$, $f(x)$ дифференцируема всюду в области определения: $f'(x) = 3 - 3x^2$.
Решим неравенство $f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0, 3(1 - x^2) > 0,$

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ -это интервал возрастания функции.

Соответственно неравенство $3 - 3x^2 < 0$ справедливо для всех $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – область убывания функции.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума), если в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех x этой окрестности.

Теорема 2. (Необходимое условие существования экстремума)

Если $f(x)$ 1) определена в окрестности точки x_0 , 2) дифференцируема в точке x_0 и 3) имеет в ней локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная $f'(x) = 0$ называются критическими.

Замечание. Функция может иметь экстремум и в точках, где первая производная не существует. Например: $y = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases}$ Функция

непрерывна в точке $x = 1$, но не дифференцируема т. к.

$\lim_{x \rightarrow 1+0} y' = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = -1$ односторонние пределы не равны, значит, $y'(x)$ не существует в точке $x = 1$, но функция имеет минимум.

Теорема 3. (Достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$: 1) непрерывна в точке x_0 , 2) дифференцируема в некоторой области $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 3) $f'(x_0) = 0$ либо не существует и 4) при переходе через точку x_0 производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем, если производная слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то x_0 – точка минимума; если слева от x_0 производная положительна (функция возрастает) а справа отрицательна (функция убывает), то x_0 – точка максимума.

Замечание: в промежутке между критическими точками производная сохраняет знак, следовательно, это промежутки монотонности.

Теорема 4. (Исследование на экстремум с помощью второй производной или второе достаточное условие экстремума).

Если 1) в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0) = 0$, 2) существует вторая производная, 3) $f''(x_0) \neq 0$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то при $f''(x_0) > 0$ функция имеет минимум, а при $f''(x_0) < 0$ – максимум. Итак, при исследовании функции на экстремум необходимо пользоваться правилами:

1. Найти первую производную $y' = f'(x)$

2. Найти критические точки x_i , решив уравнения $y' = 0$ и $y' = \infty$.

3. Проверить, меняет ли знак первая производная при переходе через точку x_i или установить знак второй производной $f''(x_i)$, классифицировать экстремум.

4. Найти значение функции в экстремальных точках.

Задача. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{x} \ln x$.

Решение. Область определения $D(f) = (0, \infty)$; $y' = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$,

$y' = 0$, $\ln x = 1$, $x_1 = e$, $y' = \infty$ при $x = 0$. Это значение x не принадлежит области определения функции. Значит, $x = e$ – единственная критическая точка. Проверим знак первой производной слева и справа от нее.

При $x < e$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) > 0$, функция возрастает, при $x > e$, $f'(x) < 0$

функция убывает, значит $x = e$ – точка максимума, $y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ –

максимальное значение функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции.

Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения находятся либо на концах промежутка, либо в экстремальных точках.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найти первую производную и все критические точки x_i , принадлежащие $[a, b]$.
2. Вычислить значения $f(x_i)$.
3. Вычислить значения функции на концах промежутка.
4. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$ и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на промежутке $[-3, 0]$.

Решение. Необходимое условие экстремума $y' = 0$, поэтому $3x^2 - 12 = 0$, а корни уравнения $x = \pm 2$ являются критическими точками, но промежутку принадлежит только $x = -2$. Найдем теперь $y(-2) = 23$ и на концах промежутка $y(-3) = 16$ и $y(0) = 7$. Среди них самое большое 23, самое меньшее 7.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Пусть кривая задана функцией $y = f(x)$.

Определение 1. Кривая называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a, b]$, если все точки кривой находятся ниже (выше) любой касательной к графику функции.

Определение 2. Точка $M_0(x_0, y_0)$, отделяющая вогнутую часть от выпуклой, называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке, причем $f''(x) < 0$ для любого x из этого промежутка, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x) > 0$, то график вогнутый.

Из теоремы следует, что для нахождения промежутков (выпуклости) вогнутости надо найти вторую производную функции и определить промежутки, где она положительна (отрицательна). Необходимым условием существования точки перегиба является обращение в нуль второй производной или ее отсутствие в точке x_0 , то есть условие $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$.

В случае выполнения одного из этих условий точка x_0 называется критической точкой второго рода.

Достаточным условием того, что точка M_0 - точка перегиба является смена знака второй производной при переходе через критические точки второго рода.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти критические точки второго рода, принадлежащие области определения функции.
3. Определить знак второй производной в каждом интервале области определения между соседними критическими точками.
4. По знаку $f''(x)$ установить интервалы выпуклости, вогнутости и по смене знака второй производной в окрестности точки – наличие или отсутствие точки перегиба.

4.2.8. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции при $x \rightarrow \infty$ или $y \rightarrow \infty$.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

1. Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если при $x \rightarrow a$ хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен, т.е. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$ или

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$ т. е. в точке $x = a$ функция терпит разрыв второго рода.

Задача. Найти вертикальные асимптоты функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x = -1$ и $x = 1$ функция не определена. Найдем односторонние пределы $f(x)$ при $x \rightarrow \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 1$, $x = -1$ — вертикальные асимптоты графика.

Наклонные и горизонтальные асимптоты

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$, т. е. разность между ординатами точек кривой и асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ есть бесконечно малая величина.

Теорема. Для того, чтобы график функции имел наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$, причем эти пределы могут быть неравными при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Если $k = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, получаем горизонтальную асимптоту $y = b$. Таким образом, прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Задача 2. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. $D(f) = (\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Вычислим

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1) \cdot x} = \\ = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1 - \frac{1}{x})} = 1, \quad k = 1.$$

$$\text{Найдем } b: \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

Получим уравнение асимптоты $y = x + 1$; убедимся, что утверждение теоремы выполняется. Преобразуем функцию, выделив целую часть.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad \text{где } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0, \quad f(x) = x + 1 + \alpha(x)$$

Кроме того, функция имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ -\frac{1}{0} \right\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ +\frac{1}{0} \right\} = +\infty.$$

Задача 3. Найти асимптоты графика функции $y = e^{1/(2-x)}$.

Решение. Найдем $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. При $x = 2$ функция $y = e^{1/(2-x)}$ терпит разрыв второго порядка, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} e^{1/(2-x)} = e^{-1/0} = e^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} e^{1/(2-x)} = e^{1/0} = e^{\infty} = \infty.$$

Таким образом, $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем горизонтальные асимптоты.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/(2-x)} = e^{1/(\infty)} = e^0 = 1$, следовательно, $y = 1$ является горизонтальной асимптотой.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции, исследовать ее поведение на границах области определения.
2. Найти точки разрыва и установить их характер с помощью односторонних пределов.
3. Исследовать периодичность, четность (нечетность), найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика.
7. Построить график, используя результаты исследования.

Задача 4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

1. Найдем область определения $D(f)$. из условия $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq 1, x \neq -1$, следовательно,

2. $x_1 = 1, x_2 = -1$ – точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = 1 + \frac{2}{-0} = 1 - \infty = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = 1 + \frac{2}{0} = \infty.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ – точки разрыва второго рода, и $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты.

3. Для установления симметрии графика функции найдем

$$f(-x) = -x + \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -x - \frac{2x}{x^2 - 1} = -\left(x + \frac{2x}{x^2 - 1}\right) = -f(x), \quad \text{это}$$

означает, что $f(x)$ – нечетная функция, и ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно провести ее исследование для $x \geq 0$. Очевидно, что функция не является периодической. Точка $O(0,0)$ является единственной точкой пересечения с осями координат, т.к. $f(0) = 0$.

4. Первая производная:
$$y' = 1 + 2 \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2},$$

Критические точки найдем из условий $y' = 0$, $y' = \infty$.

а) $1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = 0$, $\frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0$, $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, $x^2 - 1 \neq 0$.

Решая биквадратное уравнение, найдем $x_1, x_2 \approx \pm 2,05$.

б) $1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \infty$, $x^4 - 4x^2 - 1 \neq 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_3, x_4 = \pm 1$.

Таким образом, критические точки функции: $x_1 = \sqrt{4,236} \approx 2,05$, $x_2 = -\sqrt{4,236} \approx -2,05$, а точки $x_3, x_4 = \pm 1$ не входят в область определения, следовательно, не являются критическими точками. Проверим критические точки на экстремум по первому признаку.

$$y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0, \text{ при } 0 < x < 2,05, \quad y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} > 0, \text{ при } x > 2,05$$

Так как производная меняет знак при переходе через критическую точку, то в точке $x = 2,05$ функция имеет минимум. Составим таблицу.

x	0	(0, 1)	1	(1; 2,05)	2,05	(2,05, ∞)
$f(x)$	0	↓	не сущ.	↓	(min) 3,4	↑
$f'(x)$	0	–	не сущ.	–	0	+

5. Найдем $y'' = \left(1 - 2 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^3}$. Критические точки

второго рода найдем из условия $y'' = 0$, $4x(x^2 + 3) = 0$, $x_1 = 0$; при $(x^2 - 1)^3 = 0$, откуда $x = \pm 1$. Так как $x = \pm 1$ не входят в область определения функции, то $x = 0$ единственная критическая точка. Проверим знак второй производной при переходе через точку $x = 0$ $y'' > 0$ при $x < 0$,

$y'' < 0$ при $x > 0$. y'' меняет знак с «+» на «-», значит, $x = 0$ – точка перегиба, и график меняет вогнутость на выпуклость при переходе через критическую точку. Итак, в $(0, 1)$ функция выпукла, а в $(1, \infty)$ – вогнута.

6. Найдем асимптоты. Наклонные асимптоты имеют вид:

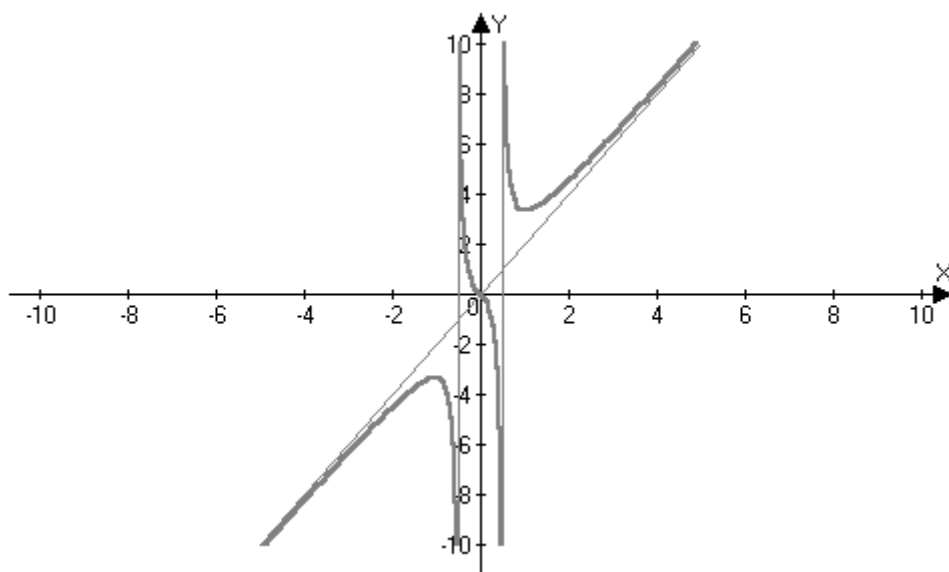
$$y = kx + b;$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0, b = 0,$$

отсюда уравнение наклонной асимптоты $y = x$. Горизонтальные асимптоты отсутствуют, а вертикальные были найдены в п. 2.

7. По результатам исследования построим график. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x > 0$ и отобразить его симметрично начала координат.



Варианты контрольных заданий для контрольной работы № 4

Задания

1. Найти первую производную для указанных функций.
2. Функция задана параметрически. Найти y'_x , y''_x .
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на замкнутом отрезке.
4. Вычислить пределы, применив правило Лопиталья.
5. Исследовать функции по полной схеме и построить графики.

6. Вычислить приближенно значение выражения с помощью дифференциала.

Вариант 1

1. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$, б) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$,
 в) $y = \ln \sin(2x+5)$, г) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{2x}(x^2+4)}{x^5}}$, д) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = 5xy$;
 2. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{(1-t^2)^3} \end{cases}$; 3. $f(x) = x^3 - 12x + 7, [0,3]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-6x} - 1 + 2x}{x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \alpha x)^{1/\sin \beta x}$;
 5. а) $y = \frac{x^2+1}{x}$, б) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$; 6. $\sqrt[3]{65}$.

Вариант 2

1. а) $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$; б) $y = (5^{\operatorname{tg} 2x} - x^2)^3$; в) $y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x}$;
 г) $y = \ln 3 \sqrt{\frac{x^5 e^{6x}}{x^3 - 4x}}$; д) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
 2. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2 \\ y = \ln(1+t^4) \end{cases}$; 3. $f(x) = x^5 - \frac{5x^3}{3} + 2, [0,2]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x/2} - 2 - x}{x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{4}{1-x^4} \right)$;
 5. а) $y = \frac{1}{1+x^2}$, б) $y = xe^{-x}$; 6. $\cos 31^\circ$.

Вариант 3

1. а) $y = x \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$, б) $y = \ln 5 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{x^2 e^{7x}}}$, в) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$,

г) $y = \arcsin \sqrt{1-3x}$, д) $y \sin x = \cos(x-y)$;
 2. $\begin{cases} y = \sin^3 2t \\ x = 2 \cos^3 2t \end{cases}$; 3. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{1/x}$;
 5. а) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, б) $y = e^{1/x}$; 6. $\operatorname{arctg} 1, 1$.

Вариант 4

1. а) $y = \frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$, б) $y = \left(2^{\cos x} + \sin^3 x\right)^2$,
 в) $y = x^{-\operatorname{tg} x}$, г) $y = \left(1 + \operatorname{ctg}^2 3x\right)e^{-x}$, д) $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;
 2. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$; 3. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3, 1]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 2x - 12x}{7x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos mx)^{n/x^2}$;
 5. а) $y = \frac{x^3+1}{x^2}$, б) $y = \frac{\ln x}{x}$; 6. $\arcsin 0,54$.

Вариант 5

1. а) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, б) $y = \left(4^{\arccos 2x} - \sqrt{1-4x^2}\right)^3$,
 в) $y = e^{-\cos 5x}$, г) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x} \cdot x^5}{(1+x^2)^3}}$, д) $(e^x - 1)(e^y - 1) = 1$;
 2. $\begin{cases} x = 3 \cos^2 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$; 3. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 2x - 6x}{2x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$;
 5. а) $y = \frac{x}{3-x^2}$, б) $y = x \ln x$; 6. $\lg 11$.

Вариант 6

1. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5\sqrt[5]{x^3 + 1}$, б) $y = 2\operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$,
 в) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$, г) $y = (3^{\operatorname{ctg} x} + \ln \sin x)^3$, д) $y^2 x - e^{y/x} = 0$.
 2. $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin^2 t \end{cases}$; 3. $f(x) = x^4 + 4x, [-2, 2]$.
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x) + 3x}{x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$;
 5. а) $y = \frac{1}{1 - x^2}$, б) $y = \ln(x^2 - 4)$; 6. $\operatorname{tg} 46^\circ$.

Вариант 7

1. а) $y = 5\sqrt{4x + 3} - \frac{2}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$, б) $y = x^2 e^{\cos x}$,
 в) $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$, г) $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$, д) $x + y + e^{xy} = 2$;
 2. $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$; 3. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [0, 4]$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x} - 1 + 5x}{3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x$;
 5. а) $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$; б) $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$; 6. $\sqrt[3]{26}$.

Вариант 8

1. а) $y = \frac{x}{(x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)^3}$, б) $y = \sqrt[3]{(1 + \sin^3 2x)^2}$,
 в) $y = (1 + \operatorname{tg}^2 x) e^{\operatorname{arctg}^2 x}$, г) $y = (\arcsin 3x)^{x^2}$,
 д) $x \ln(1 + y^2) + y \ln(1 + x^2) = 0$;
 2. $\begin{cases} x = t^2 + t + 10 \\ y = t^3 + t \end{cases}$; 3. $y = \sin x - \frac{x}{2}, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{x^3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x,$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{2x^2}{4x^2 - 1}, \quad \text{б) } y = x^2 - 2 \ln x; \quad 6. (1,021)^{11}.$$

Вариант 9

$$1. \text{ a) } y = \frac{2}{x + \sqrt{1 + x^2}}, \quad \text{б) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{в) } y = \arccos^2(e^{5x}),$$

$$\text{г) } y = x^{\arcsin x}, \quad \text{д) } \ln y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$2. \begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = e^{t^3} \end{cases}; \quad 3. y = x^5 - \frac{5x^3}{3} + 7, \quad [-2, 1];$$

$$4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 6x}{5x^3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x};$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{2x + 1}{x^2}, \quad \text{б) } y = \frac{e^x}{e^x - 1}; \quad 6. \sqrt[4]{15,8}.$$

Вариант 10

$$1. \text{ a) } y = x + 5 \sqrt{\frac{1 + x^5}{1 - x^5}}, \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^2(x^3 + 1), \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg} 3 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$$

$$\text{г) } y = (1 + \sin 2x)^{\cos 2x}, \quad \text{д) } x^2 y^2 + \arccos(2x + y) = 0;$$

$$2. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \sqrt{t^3} \\ y = \ln(1 + t^3)^3 \end{cases}; \quad 3. y = \frac{8 - x}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad [-8, 0];$$

$$4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - x}{x^2}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\pi/2 - x};$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{1}{x^2 - 9}, \quad \text{б) } y = x^2 e^{-e}, \quad 6. (0,95)^5.$$

Вариант 11

$$1. \text{ a) } y = \frac{x + 1}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}, \quad \text{б) } y = \ln \frac{\sqrt{1 + x}}{x^3 e^{5x}},$$

- в) $y = \sin \ln(x^2 + 4)$, г) $y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$, д) $e^x + e^y = e^{xy}$;
2. $\begin{cases} x = e^{t^2 - 2t} \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$; 3. $y = \frac{x-3}{x^2+7}$, $[-10, -3]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;
5. а) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$, б) $y = 2x - \arcsin x$; 6. $\sin 61^\circ$.

Вариант 12

1. а) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$, б) $y = \cos^2(\sin x)$, в) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$,
 г) $y \cos x = \sin(y-x)$, д) $y = (\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)^3$,
2. $\begin{cases} y = \cos^3 t, \\ x = 2 \sin 2t. \end{cases}$; 3. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-1, 2]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;
5. а) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$, б) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$; 6. $\sqrt{82}$.

Вариант 13

1. а) $y = \sqrt{2x+1} - \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$, б) $y = x^3 e^{\operatorname{tg} x}$,
 в) $y = (\ln x + \sin \ln x)^2$, г) $y = (\arccos x)^{\frac{1}{x}}$, д) $yx = \ln(x+y)$;
2. $\begin{cases} x = \ln \sin t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$; 3. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0, 4]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$;
5. а) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, б) $y = x^3 e^{-x}$; 6. $e^{1,03}$

Вариант 14

1. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + 4\sqrt{x^2 + 1}$, б) $y = e^{\sin^2 x} \cos x$,
в) $y = \operatorname{tg}(x^2 + \sin x)$, г) $y = (\sin x)^{\ln x}$, д) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;
2. $\begin{cases} y = \operatorname{tg}^2 t \\ x = \ln \sin t \end{cases}$; 3. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, [-1, 2]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;
5. а) $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, б) $y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$; 6. $\operatorname{ctg} 46^\circ$.

Вариант 15

1. а) $y = \frac{\sqrt{4 - 4x + x^2}}{x^2 - 4}$, б) $(\sin x + 1)\operatorname{tg} 2x$,
в) $y = (3^{\sin x} - \cos^2 x)^2$, г) $y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$, д) $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
2. $\begin{cases} y = t^3 + 3t^2 \\ x = t^2 + 2t \end{cases}$; 3. $y = \frac{x-1}{x+1}, [0, 4]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(e^{1/x} - 1))$;
5. а) $y = x^3 e^{-x}$, б) $y = \frac{x^2}{3 - x^2}$; 6. $(1, 03)^{12}$.

Вариант 16

1. а) $y = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$, б) $y = \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, в) $y = \operatorname{tg}^2(1 + \cos x)$,
г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$, д) $\ln y = \arcsin \frac{y}{x}$;
2. $\begin{cases} y = t^3 + t^2 \\ x = t^3 - 1 \end{cases}$; 3. $y = 3x - x^3, [-2, 3]$;
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{3x} - \cos 3x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$;
5. а) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y = x - \ln(x-1)$; 6. $4^{2,02}$.

Вариант 17

1. а) $y = \sqrt{x} \cdot \ln(x + \sqrt{x+1})$, б) $y = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2 - x}}$, в) $y = \operatorname{ctg}^3(\sin x)$,

г) $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$, д) $y = \operatorname{arctg}(x + y)$;

2. $\begin{cases} x = \ln(t^2 - 1); \\ y = t - 1 \end{cases}$; 3. $y = \frac{x-2}{x^2+5}$, $[-2, 3]$;

4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$;

5. а) $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$, б) $y = x^3 e^x$; 6. $\arcsin 0,58$.

Вариант 18

1. а) $y = 3\sqrt{x^2 + 4} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, б) $y = x^3 e^{\operatorname{tg} x}$, в) $y = \ln(\ln x + x^2)$,

г) $y = \ln \frac{x^3 \cos^2 x}{\sqrt{1-x^4}}$, д) $x + y + 2^{xy} = 2$;

2. $\begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$; 3. $y = x + \frac{1}{x}$, $[-10, -0,1]$;

4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \sin \frac{a}{x} \right]$;

5. а) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, б) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$; 6. $8^{3,03}$.

Вариант 19

1. а) $y = \frac{\sqrt[4]{x^4 + x}}{\sqrt{x+1}}$, б) $y = x^2 \operatorname{arctg} x^2$, в) $y = \arcsin^2 e^{2x}$,

г) $y = (\cos x)^{\frac{1}{x+1}}$, д) $y^2 = e^y x + x^2$;

2. $\begin{cases} y = \operatorname{ctg}^2 t \\ x = \sin t \end{cases}$; 3. $y = 81x - x^4$, $[-1, 4]$;

4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$, б) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
 5. а) $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$, б) $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$; 6. $\sqrt{63,4}$.

Вариант 20

1. а) $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$, б) $y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$, в) $y = \frac{\arcsin x}{1 - 2x}$,
 г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$, д) $y = 1 + xe^y$;
 2. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$; 3. а) $y = \frac{x^3}{x-1}$, б) $y = e^{\frac{1}{x-3}}$;
 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$;
 5. а) $y = \frac{4x}{4+x^2}$, б) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 6. $\sqrt[3]{8,2}$.

Литература обязательная

- 1 Арефьев К. П., Ивлев Е. Т., Тарбокова Т. В. Системы линейных уравнений: учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 1996.
- 2 Высшая математика. Часть I. Учебное пособие / К. П. Арефьев, А. И. Нагорнова, Е. И. Подберезина, Г. П. Столярова, А. Н. Харлова. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 188 с.
- 3 Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
- 4 Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в примерах и задачах. Часть I. – М.: Высшая школа, 1980.
- 5 Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1985.
- 6 Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Часть I. – М., 1971.
- 7 Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. – М.: Наука, 1985. – 429 с.
- 8 Сборник задач по математике для ВТУЗов / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. Часть I. – М.: Наука, 1981. – С. 9–10.
- 9 Краткий курс высшей математики. Том 1 / В. Е. Шнейдер и др. – М.: Высшая школа, 1978.