

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Матрицы

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, в которой в специальном порядке записаны $m \cdot n$ элементов a_{ij} :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Первый индекс i является номером строки, а второй индекс j – номером столбца, на пересечении которых в матрице стоит элемент a_{ij} .

Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число строк – ее порядком. Остальные матрицы называют *прямоугольными*.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ считаются *равными* ($A = B$) тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы $a_{ij} = b_{ij}$, ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Диагональ квадратной матрицы, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называется *главной*, а диагональ, которая содержит элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$, называется – *побочной*.

Суммой $A + B$ – матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $(m \times n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, которая получается из матрицы A умножением всех элементов на α :

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $(m \times n)$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размерности $(n \times k)$ называется матрица $C = (c_{ij})$ раз-

мерности $(m \times k)$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений соответствующих элементов i – ой строки матрицы A и j – го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = \sum_{v=1}^n a_{iv} b_{vj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k).$$

Заметим, что число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B .

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется, т.е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Сумма нулевой матрицы O и произвольной матрицы A дает матрицу A :

$$A + O = A.$$

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Вычислить 1) $A + B$; 2) $2A$; 3) $A \cdot B$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$1) A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3 & -2+4 \\ 5+2 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix},$$

$$2) 2A = 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -4 \end{bmatrix},$$

$$3) A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

1.2 Определители

Введем понятие определителя (или детерминанта) матрицы.

Определителем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

порядка $n > 1$ называется число $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$, где M_{1k} – определитель порядка $(n-1)$, полученный из матрицы A вычеркиванием первой строки и k -го столбца. Число M_{1k} называется дополнительным минором элемента a_{1k} .

Применим данное определение к матрицам 2-го и 3-го порядков. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$. Аналогично для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

получим

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что понятие определителя имеет смысл только для квадратных матриц.

В дальнейшем умение вычислять определители необходимо нам для решения систем линейных уравнений методом Крамера.

1.3 Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Матрица A , составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а матрица

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

называется *расширенной матрицей системы*.

Если $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система (1) называется *однородной*.

Числа $c_1, c_2, \cdots, c_n$ называются *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Введем понятие ранга матрицы.

Определение. Минором M_k порядка k матрицы A называется любой определитель k -го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых « k » строк и « k » столбцов.

В матрице A размером $(m \times n)$ минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или миноров порядка $r + 1$ вообще нет.

Рангом матрицы называется порядок базисного минора (обозначение $\text{rang } A$).

Проще всего находить ранг матрицы и ее базисный минор при помощи *элементарных преобразований*, к которым относятся:

- 1) замена строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками;
- 2) перестановка строк матрицы;
- 3) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
- 4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
- 5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки;

Важное значение имеет **теорема**: элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, полученные в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными* (пишут: $A \sim B$).

Если при помощи нескольких последовательно выполненных элементарных преобразований перейти от матрицы A к некоторой другой матрице A_1 , то $\text{rang } A = \text{rang } A_1$. Вычислив ранг A_1 мы тем самым будем знать и ранг A . Оказывается, что от любой матрицы A можно перейти к такой матрице A_1 , вычисление ранга которой не представляет затруднений; для этого следует добиться, чтобы в A_1 имела вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы, имеющие вид (4) называются *треугольными*.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разберем преобразования матрицы A :

1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-4) , к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-7) , к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-10) ;

2) разделим все элементы второй строки на (-3) , третьей на (-6) , четвертой строки на (-9) ;

3) к третьей и четвертой строкам прибавим вторую, умноженную на (-1) ;

4) вычеркнем третью и четвертую строки, состоящие только из нулей.

В результате данных преобразований остались две различные строки.

В качестве базисного минора возьмем определитель $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Его порядок равен двум, а определителей третьего порядка составить уже нельзя, следовательно, $\text{rang } A = 2$.

Вопрос о совместности системы (1) полностью решается следующей теоремой:

Рассмотрим далее некоторые методы решения систем линейных уравнений.

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е.

$$\text{rang } A = \text{rang } A^* = r$$

тогда:

- 1) если $r = n$, то система имеет единственное решение;*
- 2) если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений, а именно, некоторым $n - r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определяются уже единственным образом*

1.3.1. Метод Крамера

Если в системе (1) $m = n$ и $\det A \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение и

$$x_i = \Delta_i / \det A, \quad (5)$$

где Δ_i – определитель, полученный из определителя матрицы A заменой i – го столбца на столбец свободных членов. Формулы (5) носят названия формул Крамера.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0 - 5) - 2(0 - 1) + (10 + 1) = -15 + 2 + 11 = -2.$$

Так как $\Delta = -2 \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Вычислим Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(0 - 5) - 2(0 + 3) + (30 - 3) = -25 - 6 + 27 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0 + 3) - 5(0 - 1) + (-6 - 6) = 9 + 5 - 12 = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-3 - 30) - 2(-6 - 6) + 5(10 + 1) = -81 + 24 + 55 = -2.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Таким образом, получили $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 = 5, \\ 2 \cdot 2 + 1 + 1 = 6, \\ 2 - 5 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

1.3.2. Метод Гаусса

Пусть задана система (1). Для того, чтобы решить систему (1) методом Гаусса, надо данную систему привести к треугольному виду, а затем последовательно вычислить неизвестные.

На практике рациональнее преобразовывать не саму систему, а ее расширенную матрицу. Расширенную матрицу системы приводим с помощью элементарных преобразований к виду, когда все элементы, стоящие ниже главной диагонали равны нулю.

Метод Гаусса является одним из универсальных методов нахождения решения системы линейных уравнений. Его универсальность за-

ключается в том, что он позволяет установить не только совместность или несовместности системы, но и найти решение совместной системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу A^* и приведем ее к треугольному виду (4):

$$\begin{aligned} A^* &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Разберем преобразование матрицы A^* :

- 1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2) , к третьей строке прибавим первую;
- 2) разделим элементы третьей строки на 2;
- 3) к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-1) ;
- 4) разделим элементы третьей строки на (-3) .

Очевидно, что $\text{rang } A = \text{rang } A^* = 3$, т.к. базисный минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Число неизвестных $n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Найдем его методом Гаусса, для этого запишем систему, соответствующую преобразованной матрице A^* (укороченная система):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Откуда получим: $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$.

Проверка:
$$\begin{cases} 2 - 1 - 2 = -1, \\ 4 - 1 - 1 = 2, \\ -2 + 3 + 2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Пример.

Найти общее решение системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, найдем ее ранг, используя элементарные преобразования.

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & 1 \end{array} \right].$$

Так как число неизвестных $n = 4$, ранг $r = 2$, $r < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Запишем преобразованную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим минор $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, который является базисным,

неизвестные x_1, x_2 называются базисными неизвестными, а x_3, x_4 – свободными. Выразим базисные неизвестные из системы (5) через свободные

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot (5x_3 + 5x_4 + 1) - 2x_3 - 3x_4 = 8x_3 + 7x_4 + 2 \\ x_2 = 5x_3 + 5x_4 + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 + 7x_4 + 2 \\ x_2 = 5x_3 + 5x_4 + 1. \end{cases} \quad (6)$$

Полученное решение (6) является общим решением исходной системы.

1.3.3. Схема решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений

1) проверяем условие $\text{rang } A = \text{rang } A^* = r$ (если $\text{rang } A \neq \text{rang } A^*$, то систем не имеет решения);

- 2) выбираем базисный минор порядка r и записываем укороченную систему;
- 3) неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ назовем *базисными*, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ *свободными* и выразим базисные неизвестные через свободные;
- 4) записываем общее решение системы.

Пример. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и одно частное решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. ее расширенная матрица A^* получается добавлением к основной матрице A нулевого столбца и, следовательно, всегда $\text{rang} A = \text{rang} A^*$.

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ всегда является решением однородной системы (тривиальное решение).

Для существования нетривиального (ненулевого) решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang} A = r < n$.

Найдем ранг матрицы A .

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Разберем преобразования матрицы A :

- 1) ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3) , к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4) , к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-3) ;
 - 2) разделим элементы второй строки на (-1) , элементы третьей строки на (-3) , а элементы четвертой строки на 2;
 - 3) из третьей и четвертой строк вычтем вторую строку.
- Выберем в качестве базисного минора

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $\text{rang } A = 2$ и система имеет ненулевые решения.

Запишем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 (т.к. в базисный минор выбраны 1-й и 2-й столбцы), тогда x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Полагая $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, находим x_1 и x_2 .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4c_3 + 3c_4 \\ x_2 = -6c_3 + 5c_4 \end{cases}.$$

Подставим x_2 в первое уравнение системы и найдем x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 + 2(-6c_3 + 5c_4) &= -4c_3 + 3c_4, \\ x_1 &= 12c_3 - 10c_4 - 4c_3 + 3c_4 = 8c_3 - 7c_4. \end{aligned}$$

Запишем общее решение системы

$$X(c_3, c_4) = \begin{pmatrix} 8c_3 - 7c_4 \\ -6c_3 + 5c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим любое частное решение. Например, полагая $c_3 = 1$, $c_4 = 0$, получим $x_1 = 8$, $x_2 = -6$. Таким образом, частное решение системы имеет вид: $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.

2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Число y_0 называется *пределом функции $f(x)$* при x , стремящемся к x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$,

что для всех x , отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|y_0 - f(x)| < \varepsilon$.

Если y_0 есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 то пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ или } f(x) \rightarrow y_0 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Число y_1 называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева* (пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = y_1$), если $f(x)$ стремится к пределу y_1 при x ,

стремящемся к числу x_0 так, что принимает только значения, меньшие

x_0 . Если x принимает только значения, большие x_0 , то пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = y_2 \text{ и называют } y_2 \text{ пределом функции } f(x) \text{ в точке } x_0$$

справа.

При вычислении пределов функций используются следующие теоремы:

Если каждая из функций $y = f(x)$ и $g = \varphi(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$, то сумма, разность и произведение этих функций также имеет конечный предел, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \pm \varphi(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \cdot \varphi(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),$$

Если, кроме того, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет конеч-

ный предел, причем $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$

Следствие:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

где $C = \text{const.}$

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ и m – натуральное число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m.$$

Кроме того, при вычислении пределов нужно обратить внимание на то, что для всех точек в области определения элементарных функций справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{4x - 2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{4x - 2} &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow x_0} x^3 + \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow x_0} x + 1}{4 \lim_{x \rightarrow x_0} x - 2} \\ &= \frac{2 \cdot 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 + 1}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Однако, бывают случаи, когда теоремы о пределах суммы, частного и произведения неприменимы, т.к. при вычислении пределов получаются *неопределенности* $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (1^\infty), (0^0), (\infty - \infty), (\infty^0)$.

Для вычисления таких пределов функцию $f(x)$ заменяют функцией $f_1(x)$, принимающей в окрестности точки x_0 те же значения, что и $f(x)$ и определенной в точке x_0 . Пределы таких функций равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f(x_0).$$

Рассмотрим простейшие приемы раскрытия неопределенностей и нахождения пределов функций.

2.1.1. Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Рассмотрим предел дробно-рациональной функции, когда при $x \rightarrow x_0$ и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

Решение.

Непосредственный переход к пределу по формуле (1), дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, т.е. функция в точке $x_0 = 2$ неопределенна. Для реше-

ния задачи поступим следующим образом, разделим числитель и знаменатель дроби на $(x - 2)$, получим

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)}, \quad x \neq 2.$$

Тогда
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3 - 8)}{(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)} = \frac{2^2 + 4 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Сформулируем *правило*.

Для того, чтобы найти предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \rightarrow x_0$ и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $(x - x_0)$ и перейти к пределу $x \rightarrow x_0$ в полученном выражении. Если и после этого неопределенность сохраняется, то надо произвести повторное деление на $(x - x_0)$.

Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x + 4}}$.

Решение.

При $x = 0$ получим неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(2 + \sqrt{x + 4})$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x + 4})}{(2 - \sqrt{x + 4})(2 + \sqrt{x + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x + 4})}{4 - (x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + \sqrt{x + 4})}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-(2 + \sqrt{x + 4}) \right) = -4. \end{aligned}$$

Правило. Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, в случае, когда пределы числителя и знаменателя дроби равны нулю, надо освободиться от имеющихся иррациональностей, после этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение одинаковых множителей и т. п.) и перейти к пределу при $x \rightarrow x_0$ в полученном выражении.

Замечание. В этом случае используются формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, позволяющее записать числитель по формуле: $(a^3 - b^3)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1)(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1)}{x^3(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1)} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3 - 1)}{x^3(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + 1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.1.2. Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим предел при $x \rightarrow \infty$ отношения двух многочленов

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

В данном случае теорема о пределе дроби неприменима, т.к. пределы числителя и знаменателя не существуют.

Преобразуем дробь следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} &= \frac{x^n(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{x^m(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \\ &= \frac{x^{n-m}(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)}; \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \frac{a_0}{b_0};$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-m} (a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \dots + a_n/x^n)}{(b_0 + b_1/x + a_2/x^2 + \dots + b_m/x^m)} = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ a_0/b_0, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$

Правило. Чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные бесконечности, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наибольшей степени, встречающейся в членах дроби, а затем перейти к пределу.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 7}{3x^4 + 2x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 8/x + 4/x^2 + 1/x^3 - 7/x^4}{3 + 2/x^2 + 10/x^4} = \frac{15}{3} = 5.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^2 + 100x + 1}{0.1x^5 + 0.3x^3 + 0.01}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^2 + 100x + 1}{0.1x^5 + 0.3x^3 + 0.01} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000/x^3 + 100/x^4 + 1/x^5}{0.1 + 0.3/x^2 + 0.01/x^5} = \frac{0}{0.1} = 0.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 12}{x + 5}.$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 12}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 12/x^2}{1/x + 5/x^2} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональности. При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которую раскрывают по правилу, указанному в предыдущем пункте, т.е. делят числитель и знаменатель дроби на x в высшей степени, а затем переходят к пределу при $x \rightarrow \infty$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 3}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2/x^2 + 5/x^2}}{x/x + 3/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 5/x^2}}{1 + 3/x} = \frac{1}{1} = 1.$$

2.1.3. Первый замечательный предел

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ от функций, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции используют первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и следствия из него

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} x/2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2} \cdot \frac{3x}{x/2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2}{\operatorname{arctg} x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x/2} = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6; \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Замечание. В этом примере использована формула тригонометрии

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

2.1.4. Второй замечательный предел

Для раскрытия неопределенностей вида (1^∞) используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + t)^{1/t} = e$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3/x}{1-2/x} \right) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) = \infty$.

Таким образом, имеем неопределенность (1^∞) . Воспользуемся вторым замечательным пределом, для этого преобразуем сначала выражение, стоящее в скобках, а именно, добавим и вычтем единицу

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{x+3}{x-2} - 1 \right) \right)^{2x+1} &= \left(1 + \frac{x+3-x+2}{x-2} \right)^{2x+1} \\ &= \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{2x+1} \end{aligned}$$

Теперь показатель степени $(2x+1)$ умножим и разделим на дробь

$$\frac{x-2}{5},$$

получим

$$\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{\frac{x-2}{5} \cdot (2x+1) \cdot \frac{5}{x-2}}.$$

Перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{\frac{(2x+1)}{x-2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(x-2)/5} \right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x+1)}{x-2}} = e^{10},$$

так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(2x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10x+5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10+5/x)}{1-2/x} = 10$.

2.2. Непрерывность функций

Определение 1. Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0 , если выполнены следующие условия:

- 1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 , т.е. $x_0 \in D$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Условие пункта 2 эквивалентно существованию равных односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$.

При исследовании функции на непрерывность пользуются следующей **теоремой**:

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b) , где $a < b$, то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

Следовательно, функция может иметь разрыв в точках, где она меняет способ своего задания или не определена.

Существуют следующие виды точек разрыва.

1. Если в точке x_0 существует конечный предел функции $f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

то такая точка называется точкой разрыва I рода (устранимый разрыв).

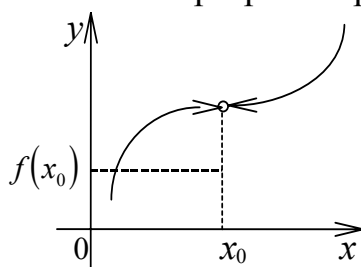


Рис. 1

2. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода (точка скачка) функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) &= A, \\ \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) &= B, \quad (A, B - \text{const}), \end{aligned}$$

но они не равны между собой.

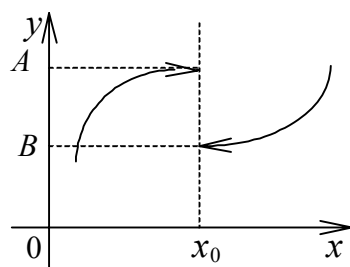


Рис. 2.

3. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода или точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности ($\pm\infty$).

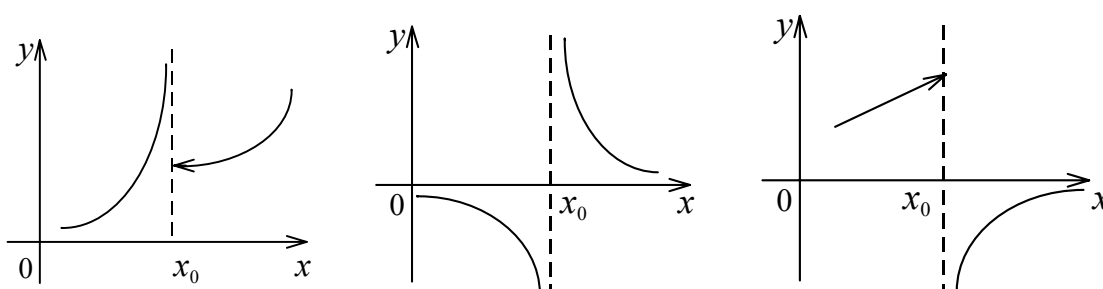


Рис. 3.

Пример. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

$$а) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2, \\ x, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Данная функция определена на всей числовой оси. Она задана двумя различными формулами для интервалов $(-\infty; 2]$ и $(2; +\infty)$ и может иметь разрыв в точке $x_0 = 2$, где меняется способ ее задания. Найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -2,$$

так как слева от точки $x_0 = 2$ функция $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2,$$

так как справа от точки $x_0 = 2$ функция $f(x) = x$.

Таким образом, в точке $x_0 = 2$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, но они не равны между собой $-2 \neq 2$. Следовательно, $x_0 = 2$ - точка разрыва I рода (точка скачка). Во всех остальных точках числовой оси данная функция непрерывна, так как формулы, ко-

торыми она задана определяют элементарные непрерывные функции. Построим график этой функции.

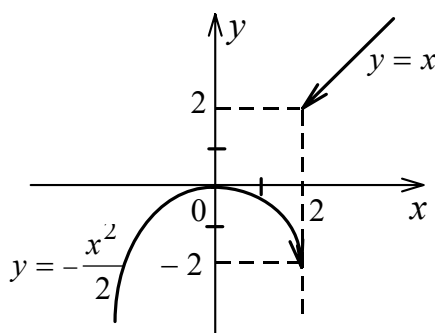


Рис. 4.

$$б) y = \frac{1}{x^2 - 25}$$

Функция y определена для всех значений кроме $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$. Эта функция элементарная, значит, она непрерывна во всей области своего определения $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$. В точках $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ функция y имеет разрывы, так как нарушается первое условие непрерывности. Чтобы определить характер разрыва в этих точках, найдем односторонние пределы

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{1}{(5-0-5)(5-0+5)} = \left(\frac{1}{-0 \cdot 10} \right) = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{1}{(5+0-5)(5+0+5)} = \left(\frac{1}{+0 \cdot 10} \right) = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5-0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow -5-0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{1}{(-5-0-5)(-5-0+5)} = \left(\frac{1}{-10 \cdot (-0)} \right) = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -5+0} \frac{1}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow -5+0} \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{1}{(-5+0-5)(-5+0+5)} = \left(\frac{1}{-10 \cdot (+0)} \right) = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty.\end{aligned}$$

Поскольку все односторонние пределы равны бесконечности, функция $y = \frac{1}{x^2 - 25}$ терпит в точках $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ разрывы II рода.

Построим график функции

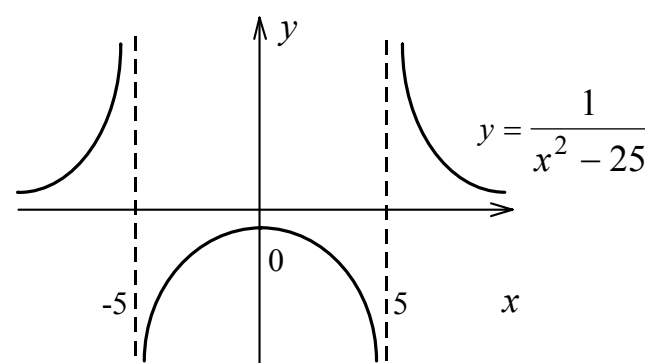


Рис. 5.

в) $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$.

Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x_0 = -1/2$. Из этого следует, что в точке $x_0 = -1/2$ функция y имеет разрыв. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow -1/2-0} \left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2 \cdot (-1/2-0)+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{-0}} \right) = \left(3 + e^{-\infty} \right) =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{e^{\infty}} \right) = \left(3 + \frac{1}{\infty} \right) = (3 + 0) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1/2+0} \left(3 + e^{\frac{1}{2x+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{2 \cdot (-1/2+0)+1}} \right) = \left(3 + e^{\frac{1}{+0}} \right) = \left(3 + e^{+\infty} \right) =$$

$$= (3 + \infty) = \infty.$$

Так как предел справа в точке $x_0 = -1/2$ равен бесконечности, заключаем, что x_0 – точка разрыва II рода. Построим график функции $y = 3 + e^{1/(2x+1)}$

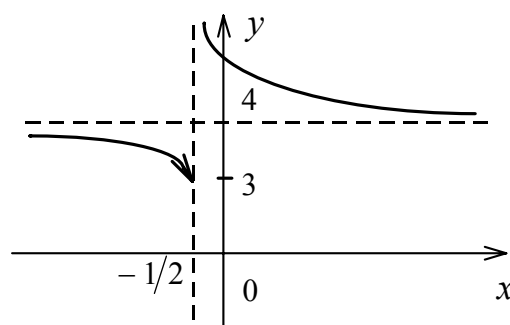


Рис. 6.

2.3. Производная и правила дифференцирования.

Пусть функция $y = f(x)$ получила приращение $\Delta y \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx , при Δx , стремящимся к нулю, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x и обозначается y'_x , или f'_x , или $\frac{dy}{dx}$.

Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Задача 1. Используя определение, найти производные функций

а) $y = x$, б) $y = \frac{2}{x}$.

Решение: а) Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее значение функции $y(x + \Delta x) = x + \Delta x$, теперь найдем Δy :

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x \text{ и составим отношение } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$\text{Осталось вычислить } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad y' = (x)' = 1.$$

б) пусть аргумент x получил приращение Δx , новому значению аргумента соответствует значение функции $y(x + \Delta x) = \frac{2}{x + \Delta x}$.

$$\text{Найдем приращение } \Delta y. \quad \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x} = -\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{2}{x^2},$

$$y' = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2(x^{-1})' = \frac{-2}{x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

Если $C = \text{const}$, а функции $U = U(x)$, $V = V(x)$ дифференцируемы, то

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $(c)' = 0;$ | 4. $(UV)' = U'V + V'U;$ |
| 2. $(x)' = 1;$ | 5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2};$ |
| 3. $(U \pm V)' = U' \pm V';$ | 6. $(CU)' = CU';$ |

Таблица производных основных элементарных функций

- | | |
|--|---|
| 1. $(x^n)' = nx^{n-1};$ | 10. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ |
| 2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0;$ | 11. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ |
| 3. $(\sin x)' = \cos x;$ | 12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x};$ |
| 4. $(\cos x)' = -\sin x;$ | 13. $(a^x)' = a^x \ln a;$ |
| 5. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ | 14. $(e^x)' = e^x;$ |
| 6. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ | 15. $(\text{sh} x)' = \text{ch} x;$ |
| 7. $(\text{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ | 16. $(\text{ch} x)' = \text{sh} x;$ |
| 8. $(\text{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ | 17. $(\text{th} x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x};$ |
| 9. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ | 18. $(\text{cth} x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$ |

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(U)$ и $U = \varphi(x)$, т.е. $y = f[\varphi(x)]$, где y и U имеют производные, то $y' = f'_U U'_x$. Здесь $u = u(x)$ – промежуточный аргумент. Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Задача 2. Найти производные функций:

а) $2x^3 + \frac{3}{x^2} - 6\sqrt[3]{x^5}$, б) $(x^5 - \ln x)^3$,
в) $\left(\arctg \frac{x}{3}\right)^6$, г) $e^{-2x} \cos x \ln \sin x$

Решение: а) представим функцию в табличной форме как сумму степенных функций и затем только найдем производную.

$$y = 2x^3 + 3x^{-2} - 6x^{5/3},$$

$$y' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3(-2x^{-3}) - 6 \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} = 6x^2 - \frac{6}{x^3} - 10\sqrt[3]{x^2}.$$

б) введем промежуточный аргумент и затем воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$U = x^5 - \ln x, \quad y = U^3, \quad y' = 3U^2 \cdot U'_x = 3(x^5 - \ln x)^2 \cdot \left(5x^4 - \frac{1}{x}\right);$$

в) пусть $U(x) = \arctg \frac{x}{3}$, где $\frac{x}{3} = V(x)$, тогда $U(x) = \arctg V$,

$$U' = \frac{1}{1+V^2} \cdot V'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}.$$

Окончательно: $y = U^6$, $y' = 6U^5 \cdot U'_x = 6\left(\arctg \frac{x}{3}\right)^5 \cdot \frac{3}{9+x^2}$;

г) правило 4 можно распространить на любое число сомножителей, если перемножаемые функции дифференцируемы:

$$y = U(x) \cdot V(x) \cdot Z(x), \quad y' = U' \cdot V \cdot Z + U \cdot V' \cdot Z + U \cdot V \cdot Z',$$

в данном случае

$$U = e^{-2x}, \quad U' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}, \quad V = \cos x, \quad V' = -\sin x,$$

$$Z = \ln \sin x, \quad Z' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = e^{-2x}(-2 \cos x \ln \sin x - \sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

2.4. Приложение производной к исследованию поведения и построение графика функции

Возрастание, убывание функции. Точки экстремума

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке $[a, b]$, если для любых $x_1 < x_2$ этого промежутка $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Функция возрастающая (убывающая) называется монотонной.

Теорема 1. (Условие монотонности)

Если функция $f(x)$ 1) определена на $[a, b]$, 2) имеет конечную производную $f'(x)$ на (a, b) , тогда, чтобы $f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Задача 1. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Область определения функции $D(f) = (-\infty, \infty)$, $f(x)$ дифференцируема всюду в области определения: $f'(x) = 3 - 3x^2$.

Решим неравенство $f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0, \quad 3(1 - x^2) > 0, \quad |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ – это интервал возрастания функции.

Соответственно неравенство $3 - 3x^2 < 0$ справедливо для всех $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – область убывания функции.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума), если в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всех x этой окрестности.

Теорема 2. (Необходимое условие существования экстремума). Если функция $f(x)$:

- 1) определена в окрестности точки x_0 ,
 - 2) дифференцируема в точке x_0 ;
 - 3) имеет в ней локальный экстремум,
- то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная $f'(x) = 0$, называются критическими.

Замечание. Функция может иметь экстремум и в точках, где первая производная не существует. Например: $y = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & x < 1 \end{cases}$ Функция непрерывна в точке $x = 1$, но не дифференцируема т.к.

$\lim_{x \rightarrow 1+0} y' = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = -1$ односторонние пределы не равны, значит, $y'(x)$ не существует в точке $x = 1$, но функция имеет минимум.

Теорема 3. (Достаточное условие экстремума). Если функция $f(x)$:

- 1) непрерывна в точке x_0 ,
- 2) дифференцируема в некоторой области $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- 3) $f'(x_0) = 0$ либо не существует,
- 4) при переходе через точку x_0 производная меняет знак,

то x_0 – точка экстремума, причем, если производная слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то x_0 – точка минимума; если слева от x_0 производная положительна (функция возрастает) а справа отрицательна (функция убывает), то x_0 – точка максимума.

Замечание: в промежутке между критическими точками производная сохраняет знак, следовательно, это промежутки монотонности.

Теорема 4. (Исследование на экстремум с помощью второй производной или второе достаточное условие экстремума). Если:

- 1) в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0) = 0$,
- 2) существует вторая производная,
- 3) $f''(x_0) \neq 0$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

то при $f''(x_0) > 0$ функция имеет минимум, а при $f''(x_0) < 0$ – максимум.

Итак, при исследовании функции на экстремум необходимо пользоваться правилами:

1. Найти первую производную $y' = f'(x)$
2. Найти критические точки x_i , решив уравнения $y' = 0$ и $y' = \infty$.
3. Проверить, меняет ли знак первая производная при переходе через точку x_i или установить знак второй производной $f''(x_i)$, классифицировать экстремум.
4. Найти значение функции в экстремальных точках.

Задача. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{x} \ln x$.

Решение. Область определения $D(f) = (0, \infty)$; $y' = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$,

$y' = 0$, $\ln x = 1$, $x_1 = e$, $y' = \infty$ при $x = 0$. Это значение x не принадлежит области определения функции. Значит, $x = e$ – единственная критическая точка. Проверим знак первой производной слева и справа от нее.

При $x < e$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) > 0$, функция возрастает, при $x > e$, $f'(x) < 0$ функция убывает, значит $x = e$ – точка максимума, $y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ – максимальное значение функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения находятся либо на концах промежутка, либо в экстремальных точках.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найти первую производную и все критические точки x_i , принадлежащие $[a, b]$.
2. Вычислить значения $f(x_i)$.
3. Вычислить значения функции на концах промежутка.
4. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$

и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на промежутке $[-3, 0]$.

Решение. Необходимое условие экстремума $y' = 0$, поэтому $3x^2 - 12 = 0$, а корни уравнения $x = \pm 2$ являются критическими точками, но промежутку принадлежит только $x = -2$. Найдем теперь $y(-2) = 23$ и на концах промежутка $y(-3) = 16$ и $y(0) = 7$. Среди них самое большое 23, самое меньшее 7.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Пусть кривая задана функцией $y = f(x)$.

Определение 1. Кривая называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a, b]$, если все точки кривой находятся ниже (выше) любой касательной к графику функции.

Определение 2. Точка $M_0(x_0, y_0)$, отделяющая вогнутую часть от выпуклой, называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке, причем $f''(x) < 0$ для любого x из этого промежутка,

ка, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x) > 0$, то график вогнутый.

Из теоремы следует, что для нахождения промежутков (выпуклости) вогнутости надо найти вторую производную функции и определить промежутки, где она положительна (отрицательна). Необходимым условием существования точки перегиба является обращение в нуль второй производной или ее отсутствие в точке x_0 , то есть условие $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$. В случае выполнения одного из этих условий точка x_0 называется критической точкой второго рода.

Достаточным условием того, что точка M_0 – точка перегиба является смена знака второй производной при переходе через критические точки второго рода.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба функции.

1. Указать область определения функции.
2. Найти критические точки второго рода, принадлежащие области определения функции.
3. Определить знак второй производной в каждом интервале области определения между соседними критическими точками.
4. По знаку $f''(x)$ установить интервалы выпуклости, вогнутости и по смене знака второй производной в окрестности точки – наличие или отсутствие точки перегиба.

2.5. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции при $x \rightarrow \infty$ или $y \rightarrow \infty$.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если при $x \rightarrow a$ хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

т. е. в точке $x = a$ функция терпит разрыв второго рода.

Задача. Найти вертикальные асимптоты функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x = -1$ и $x = 1$ функция неопределена. Найдем односторонние пределы $f(x)$ при $x \rightarrow \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty;$$

Следовательно, $x = 1$, $x = -1$ — вертикальные асимптоты графика.

Наклонные и горизонтальные асимптоты

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$, т.е. разность

между ординатами точек кривой и асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ есть бесконечно малая величина.

Теорема. Для того, чтобы график функции имел наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx], \text{ причем эти пределы могут}$$

быть неравными при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Если $k = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$,

получаем горизонтальную асимптоту $y = b$. Таким образом, прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Задача 2. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. $D(f) = (\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

$$\text{Вычислим } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1) \cdot x} =$$

$$= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1 - \frac{1}{x})} = 1, \quad k = 1.$$

Найдем b .

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$$

Получим уравнение асимптоты $y = x + 1$; убедимся, что утверждение теоремы выполняется. Преобразуем функцию, выделив целую часть:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1},$$

где $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, $f(x) = x + 1 + \alpha(x)$

Кроме того, функция имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ -\frac{1}{0} \right\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ +\frac{1}{0} \right\} = +\infty$$

Задача 3. Найти асимптоты графика функции $y = e^{1/2-x}$.

Решение. Найдем $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. При $x = 2$ функция

$y = e^{1/2-x}$ терпит разрыв второго порядка, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} e^{1/2-x} = e^{-1/0} = e^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} e^{1/2-x} = e^{1/0} = e^{\infty} = \infty$$

Таким образом, $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{2-x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1,$$

следовательно, $y = 1$ является горизонтальной асимптотой.

2. 6. Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции, исследовать ее поведение на границах области определения.
2. Найти точки разрыва и установить их характер с помощью односторонних пределов.
3. Исследовать периодичность, четность (нечетность), найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика.

7. Построить график, используя результаты исследования.

Задача 4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}.$$

1. Найдем область определения $D(f)$. из условия $1-x^2 \neq 0$, $x \neq 1, x \neq -1$.

2. Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ – точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(\frac{x}{1-x^2} \right) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{1-x^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ – точки разрыва второго рода, и $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты.

3. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т.к.

$$f(-x) = \frac{(-x)}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-(-x)^2} = -f(x).$$

Это означает, что $f(x)$ – нечетная функция, и ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно провести ее исследование для $x \geq 0$.

Очевидно, что функция не является периодической.

Точка $O(0,0)$ является единственной точкой пересечения с осями координат, т.к. $f(0) = 0$.

Первая производная

$$y' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения функции, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

Критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (в которых y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция не имеет экстремумов.

4. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'' :

$$y'' = \left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1-x^2) - 2(1-x^2)(-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Решая неравенство $y'' > 0$, или $\frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} > 0$,

Выясняем, что $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, $y'' < 0$ при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, $y'' = 0$ при $x_1 = 0$, а при $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y'' не существует.

Точка $x_1 = 0$ является точкой перегиба функции.

График является выпуклым вверх на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; выпуклым вниз на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

5. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются горизонтальными асимптотами графика функции. Выясним наличие наклонных асимптот.

Наклонные асимптоты имеют вид: $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{1-x^2} - 0x \right] = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота $y = 0$.

6. По результатам исследования построим график функции. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x > 0$ и отобразить его симметрично начала координат.

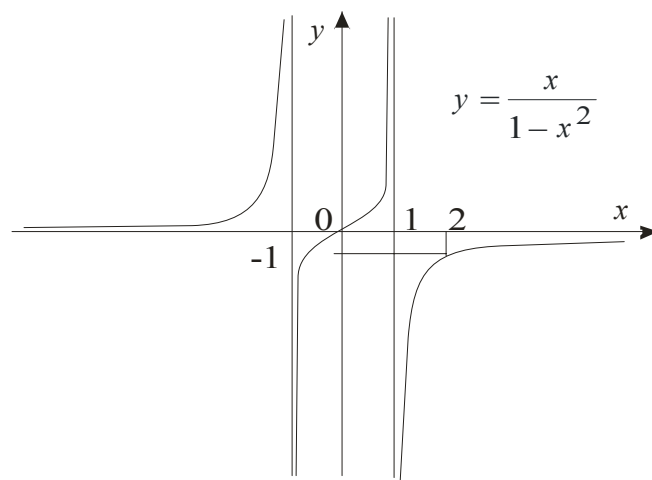


Рис. 7.

Задача 5. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

1. Найдем область определения $D(f)$. из условия $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq 1, x \neq -1$, следовательно, $x_1 = 1, x_2 = -1$ – точки разрыва.

2. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = 1 + \frac{2}{-0} = 1 - \infty = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = 1 + \frac{2}{0} = \infty.$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ – точки разрыва второго рода, и $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты.

3. Для установления симметрии графика функции найдем

$$f(-x) = -x + \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = -x - \frac{2x}{x^2 - 1} = -\left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = -f(x).$$

Это означает, что $f(x)$ – нечетная функция, и ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно провести ее исследование для $x \geq 0$. Очевидно, что функция не является периодической. Точка $O(0,0)$ является единственной точкой пересечения с осями координат, т.к. $f(0) = 0$.

4. Первая производная:

$$y' = 1 + 2 \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2},$$

Критические точки найдем из условий $y' = 0, y' = \infty$.

$$a) 1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = 0, \quad \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0, \quad x^4 - 4x^2 - 1 = 0, \quad x^2 - 1 \neq 0.$$

Решая биквадратное уравнение, найдем $x_1, x_2 \cong \pm 2,05$.

$$b) 1 - \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \infty, \quad x^4 - 4x^2 - 1 \neq 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x_3, x_4 = \pm 1.$$

Таким образом, критические точки функции: $x_1 = \sqrt{4,236} \approx 2,05$, $x_2 = -\sqrt{4,236} \approx -2,05$, а точки $x_3, x_4 = \pm 1$ не входят в область определения, следовательно, не являются критическими точками. Проверим критические точки на экстремум по первому признаку.

$$y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0, \text{ при } 0 < x < 2,05,$$

$$y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} > 0, \text{ при } x > 2,05$$

Так как производная меняет знак при переходе через критическую точку, то в точке $x = 2,05$ функция имеет минимум. Составим таблицу.

x	0	(0, 1)	1	(1; 2.05)	2,05	(2,05, ∞)
$f(x)$	0	↓	не сущ.	↓	(min) 3,4	↑
$f'(x)$	0	–	не сущ.	–	0	+

5. Найдем

$$y'' = \left(1 - 2 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^3}.$$

Критические точки второго рода найдем из условия $y'' = 0$, $4x(x^2 + 3) = 0$, $x_1 = 0$; при $(x^2 - 1)^3 = 0$, откуда $x = \pm 1$. Так как $x = \pm 1$ не входят в область определения функции, то $x = 0$ единственная критическая точка. Проверим знак второй производной при переходе через точку $x = 0$ $y'' > 0$ при $x < 0$, $y'' < 0$ при $x > 0$. y'' меняет знак с “+” на “–”, значит, $x = 0$ – точка перегиба, и график меняет вогнутость на выпуклость при переходе через критическую точку. Итак, в $(0, 1)$ функция выпукла, а в $(1, \infty)$ – вогнута.

6. Найдем асимптоты. Наклонные асимптоты имеют вид:

$$y = kx + b,$$

$$\text{где } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{2x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right) = 0.$$

Отсюда уравнение наклонной асимптоты $y = x$. Горизонтальные асимптоты отсутствуют, а вертикальные были найдены в п. 2.

7. По результатам исследования построим график. Так как функция нечетная, то можно построить график для $x > 0$ и отобразить его симметрично начала координат.

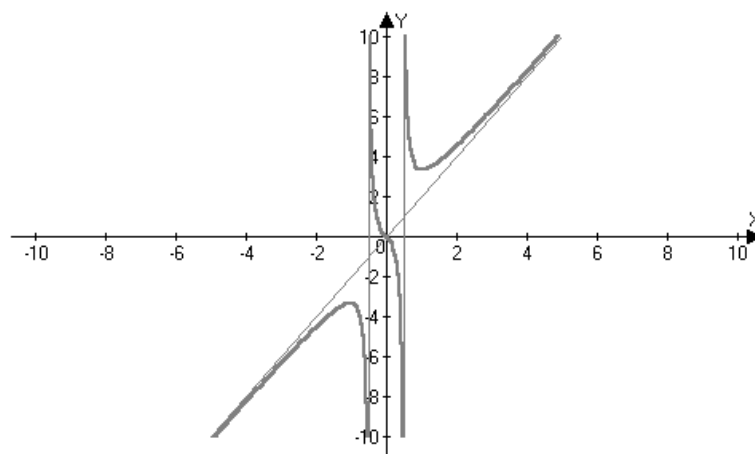


Рис. 8.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Неопределенный интеграл

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Тогда $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на (a, b) .

Например, одной из первообразных функций для функции $\cos x$ будет $\sin x$. Первообразная не единственна, т. к. $(\cos x + 2)' = (\cos x)' + 2' = \sin x$, $(\cos x - 3)' = \sin x$, а поэтому $\cos x + 2$, $\cos x - 3$ также являются первообразными для $\sin x$.

Теорема. Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на интервале (a, b) , отличаются друг от друга в этом промежутке на постоянное слагаемое, т.е. если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – некоторые первообразные, т. е. $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Следствие. Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ для данной функции $f(x)$, определенной на промежутке (a, b) , всевозможные постоянные C , мы получим все первообразные для функции $f(x)$.

Определение 2. Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Согласно определению неопределенного интеграла можно написать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Постоянная C может принимать любое значение и называется произвольной постоянной.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$d \int f(x)dx = f(x)dx, \tag{1}$$

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x).$$

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C \tag{2}$$

Замечание. В формулах (19) и (20) знаки d и $\int$ уничтожают друга. В этом смысле интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными математическими операциями.

Свойства линейности неопределенного интеграла.

$$3. \int Af(x)dx = A \int f(x)dx, \text{ где постоянная } A \neq 0.$$

$$4. \int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

5. Свойство инвариантности формул интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f(u)du = F(u) + C, \tag{3}$$

т. е. любая формула интегрирования не изменяет свой вид, если вместо независимой переменной подставить любую дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$. Поэтому таблицу интегралов от сложной функции запишем в виде:

Таблица интегралов

$$\begin{aligned}
 1. \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 & 2. \int \frac{du}{u} &= \ln|u| + C & 3. \int e^u du &= e^u + C \\
 4. \int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + C & 5. \int \sin u du &= -\cos u + C & 6. \int \cos u du &= \sin u + C \\
 7. \int \frac{du}{\cos^2 u} &= \operatorname{tg} u + C & 8. \int \frac{du}{\sin^2 u} &= -\operatorname{ctg} u + C & 9. \int \operatorname{tg} u du &= -\ln|\cos u| + C \\
 10. \int \operatorname{ctg} u du &= \ln|\sin u| + C & 11. \int \frac{du}{u^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \\
 12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \arcsin \frac{u}{a} + C & 13. \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \\
 14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C & 15. \int \operatorname{ch} u du &= \operatorname{sh} u + C \\
 16. \int \operatorname{sh} u du &= \operatorname{ch} u + C & 17. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} &= -\operatorname{cth} u + C & 18. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} &= \operatorname{th} u + C
 \end{aligned}$$

Таблица дифференциалов

$$\begin{aligned}
 1) d \frac{u^{n+1}}{n+1} &= u^n du & 2) d(\ln u) &= \frac{du}{u} \\
 3) d(e^u) &= e^u du & 4) d \left(\frac{a^u}{\ln a} \right) &= a^u du \\
 5) d(\sin u) &= \cos u du & 6) d(\cos u) &= -\sin u du \\
 7) d(\operatorname{tg} u) &= \frac{du}{\cos^2 u} & 8) d(\operatorname{ctg} u) &= \frac{-1}{\sin^2 u} du \\
 9) d(\arcsin u) &= \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} & 10) d(\arccos u) &= -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
 11) d(\operatorname{arctg} u) &= \frac{du}{1+u^2} & 12) d(\operatorname{arcctg} u) &= -\frac{du}{1+u^2}
 \end{aligned}$$

Отметим несколько преобразований, полезных для отыскания первообразных:

$$\begin{aligned}
 1. dx &= d(x+b), \text{ где } b = \text{const}; \\
 2. dx &= \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0;
 \end{aligned}$$

$$3. dx = \frac{1}{a} d(ax + b);$$

$$4. xdx = \frac{1}{2} dx^2;$$

$$5. \sin x dx = -d(\cos x);$$

$$6. \cos x dx = d(\sin x).$$

Кроме этого, $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$. Эту формулу называют подведением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.

Используя таблицу интегралов и эти формулы, найдем некоторые интегралы.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование заключается в том, чтобы преобразовать подынтегральное выражение, если это возможно, так чтобы получился дифференциал $f(x)dx$, а затем в таблице интегралов найти первообразную.

Пример 1.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Выражение $\cos x dx$ заменили на $d(\sin x)$. Получили интеграл $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$, который можно отыскать в таблице интегралов, где $u(x) = \sin x$.

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$$

Здесь мы умножили подынтегральную функцию и разделили на 2, затем внесли 2 под знак дифференциала. Заменим $2dx = d(2x+1)$ и получим табличный интеграл $\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C$.

Проверим результат дифференцированием:

$$d \left(\frac{1}{2} (\ln(2x+1) + C) \right) dx = \frac{1}{2x+1} dx.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\cos x dx}{(1 + \sin x)^2} = \int \frac{d(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x} + C.$$

В данном примере мы применили прием подведения под знак дифференциала $\cos x$ и постоянной 1. $\cos x dx = d(1 + \sin x)$.

Пример 4.

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Так как $(-x^2)' = -2x$, умножим и разделим подынтегральное выражение на -2 . Здесь выражение $-2x dx = d(-x^2)$ и получили табличный интеграл $\int e^u = e^u + C$.

$$\text{Проверка: } \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \right)' = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (-2x) = e^{-x^2} x.$$

Метод подстановки

Пусть $f(x)$ имеет первообразную, а $x = \varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема, тогда

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int f(x) dx. \quad (4)$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Чтобы избавиться от корня, полагаем $1 + e^x = t^2$, отсюда $t = \sqrt{1 + e^x}$. Найдем dx . Для этого продифференцируем равенство $d(1 + e^x) = d(t^2)$, получим $e^x dx = 2t dt$; тогда $dx = \frac{2t dt}{e^x} = \frac{2t dt}{t^2 - 1}$. Подставим dx в подынтегральное выражение; получим интеграл вида:

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2t dt}{(t^2 - 1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + C.$$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

Здесь удобно применить тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, с помощью которой мы избавимся от корня. Отсюда $dx = \cos t dt$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = -\operatorname{ctg}(\arcsin x) - \arcsin x + C. \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям

Пусть u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x . На основании формулы дифференциала произведения имеем $d(uv) = u dv + v du$.

Интегрируя, получим

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du. \quad (5)$$

Полученная формула интегрирования по частям позволяет сводить интеграл $\int u dv$ к более простому $\int v du$.

Рекомендации по применению формулы интегрирования по частям приведены в таблице:

	Вид подынтегральной функции	Рекомендации	Ожидаемое упрощение подынтегрального выражения
1	Произведение многочлена $P_u(x)$ на показательную или тригонометрическую функцию	$u = P_u(x)$ $du = e^x dx$ $du = \cos x dx$ $du = \operatorname{tg} x dx$	Под интегралом степень многочлена уменьшится на единицу
2	Произведение многочлена $P_u(x)$ на логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию	$dv = P_u(x) dx$ $u = \arcsin x$ $u = \operatorname{arctg} x$ $u = \ln x$	Под интегралом вместо трансцендентной функции появится алгебраическая функция

Пример 7.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; du = \frac{dx}{1+x^2} \\ x dx = dv; v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

Подставляя в формулу (5), получим

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Иногда формула интегрирования по частям применяется несколько раз. Рассмотрим пример такого интеграла.

Пример 8.

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 = u; 2x dx = du \\ \sin 2x dx = dv; v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int \frac{1}{2} (\cos 2x) 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = u; dx = du \\ \cos 2x dx = dv; v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Здесь формулу интегрирования по частям мы применили к полученному интегралу $\int x \cos 2x dx$ еще раз.

Замечание. Иногда применение формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу, который в таком случае называется циклическим или круговым.

Пример 9. Найти интеграл $I = \int e^{ax} \cos nx dx$.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos nx dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}; du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos nx; v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \frac{\sin nx}{n} - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx dx \end{aligned}$$

Получили интеграл, в котором $\cos nx$ заменился на $\sin nx$.

Проинтегрируем еще раз по частям, обозначим:

$$\left| \begin{array}{l} e^{ax} = u; du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin nx dx; v = \int \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right|$$

Тогда

$$I = e^{ax} \frac{\sin nx}{n} - \frac{a}{n} \left(-e^{ax} \frac{\cos nx}{n} + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx + \frac{a}{n^2} e^{ax} \cos nx - \frac{a^2}{n^2} \int e^{ax} \cos nx dx,$$

т.е. пришли к искомому интегралу I .

$$\text{Таким образом, } I = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} + \frac{a}{n^2} e^{ax} \cos nx - \frac{a^2}{n^2} I.$$

Найдем I .

$$I \left(1 + \frac{a^2}{n^2} \right) = \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx + \frac{a}{n^2} e^{ax} \cos nx + C.$$

Упрощая, получим:

$$I = \frac{e^{ax}}{n^2 + a^2} (n \sin nx + a \cos nx) + C.$$

Это пример циклического интеграла.

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим несколько видов интегралов от тригонометрических функций.

$$\text{I. } \int R(\sin x, \cos x) dx.$$

$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Это означает, что над аргументами производятся только рациональные операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целые степени (положительные и отрицательные). Интегралы этого вида приводятся к рациональной функции от x универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t.$$

Следует заметить, что, применяя эту подстановку можно привести любую подынтегральную функцию $R(\sin x, \cos x)$ к рациональной дроби, но иногда получаются громоздкие дроби, которые трудно проинтегрировать.

Рассмотрим частные случаи, когда можно избежать универсальной подстановки.

$$\text{II. } \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Здесь m и n – целые положительные числа. Если m и n – четные, то используется тригонометрические формулы понижения степени,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 10.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int dx - 2 \int \cos 2x dx + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \frac{\sin 4x}{4} + C = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Если одно из чисел m или n – нечетное, или m и n – нечетные, то отделяем от нечетной степени один множитель и делаем замену $\cos x = t$ (или $\sin x = t$) – $\sin x dx = dt$.

4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Если каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное число $x_n \in N$, то говорят, что задана числовая последовательность.

Числовую последовательность обозначают

$$(x_n)_{n \in N} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Число x_n называют n -м членом последовательности, а формулу $x_n = f(n)$ – формулой общего члена последовательности.

Числовую последовательность можно рассматривать как числовую функцию, определенную на множестве натуральных чисел.

Пусть задана числовая последовательность

$$(a_n)_{n \in N} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots.$$

Определение. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

называется числовым рядом, числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – членами ряда, а число a_n – общим (n -м) членом ряда.

Сумма конечного числа n первых слагаемых числового ряда называется n -й частичной суммой данного ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Таким образом, с каждым рядом связана последовательность частичных сумм S_n

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \dots; S_n = a_1 + a_2 + a_3; \dots; \quad (2)$$

Если последовательность $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ частичных сумм ряда (58) имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а число S – суммой данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Если существует $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то этот предел называется суммой ряда, а ряд называется сходящимся.

Для проверки сходимости ряда есть достаточные признаки, при выполнении которых ряд сходится.

Пример. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Применим достаточный признак Даламбера.

Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

По признаку Даламбера, если $l < 1$, то ряд сходится, если $l > 1$, то ряд расходится, если $l = 1$, то о сходимости ряда мы ничего сказать не можем.

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad u_n = \frac{1}{n!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

5.1. Элементы комбинаторики

Рассмотрим совокупность различных элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Произвольную упорядоченную выборку из этих элементов будем называть *соединением*. Например, при бросании монет 5 раз выпадение герба и решки могут дать соединение ГРГРГ.

Размещениями из n элементов по m ($m \leq n$) называются соединения, каждое из которых содержит ровно m различных элементов, выбранных из данных n элементов и которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов. Обозначают A_n^m и вычисляют, учитывая, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, по следующей формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещения, составленные из n элементов по n и различающиеся лишь порядком элементов называются *перестановками*

$$A_n^n = P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, каждое из которых содержит ровно m элементов и которые отличаются хотя бы одним элементом

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots [n-(m-1)]}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

5.2. Случайные события, их классификация и действия над ними

Под *испытанием* будем понимать реализацию комплекса условий. Эту реализацию называют также опытом. Классическим примером испытания в теории вероятностей является извлечение шара из урны, содержащей большое число шаров.

Явление, возникшее в результате испытания, называется *исходом* испытания, или *событием*. События обозначаются буквами $A, B, C, \dots$

События бывают трех типов:

Одни из них неизбежно возникают при каждом испытании данного вида. Это *достоверные* события (U).

Другие, наоборот, никогда не появляются. Это *невозможные* события (V).

События третьего типа характеризуются тем, что они в данном испытании могут произойти, а могут и не произойти. В каких случаях они произойдут, а в каких нет – заранее сказать нельзя. Такие события называются *случайными*.

События бывают простые и сложные. Простое событие не разлагается на другие.

Сложные события представляют собой комбинации простых событий. Если наступление события A обязательно влечет за собой наступление события B , то событие B является сложным.

События бывают совместными и несовместными. Два или более событий называются *совместными*, если они могут одновременно наступить при осуществлении одного испытания. Иными словами, это события, которые содержат одни и те же простые события. Например, событие A состоит из событий E_1, E_2, E_3 ; событие B – из E_2, E_4 , то события A и B будут совместными, поскольку в каждое из них входит событие E_2 .

Несовместными называют такие события, которые не могут наступить одновременно при одном опыте, т.е. они не содержат ни одного общего события. Если событие A состоит из событий E_1, E_2, E_3 ; а событие B – из E_4, E_5 таких, что ни одно из событий в A не совпадает с событиями из B , то события A и B – несовместные.

Назовем *суммой* событий A и B такое событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из этих событий ($A \cup B$ или $A + B$). Определение суммы распространяется на любое число слагаемых.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B будем называть произведением событий A и B и обозначать $A \cdot B$ или $A \cap B$.

Событие, которое наступает тогда и только тогда, когда событие A не наступает называется *противоположным* событию A и обозначается $\bar{A}$. Из определения следует, что два события противоположны тогда и только тогда, когда они несовместимы: сумма их образует все выборочное пространство, т. е.

$$A + \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Разностью двух событий $A - B$ (или $A \setminus B$) называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает A и не наступает B .

Графическая интерпретация соотношений между событиями:

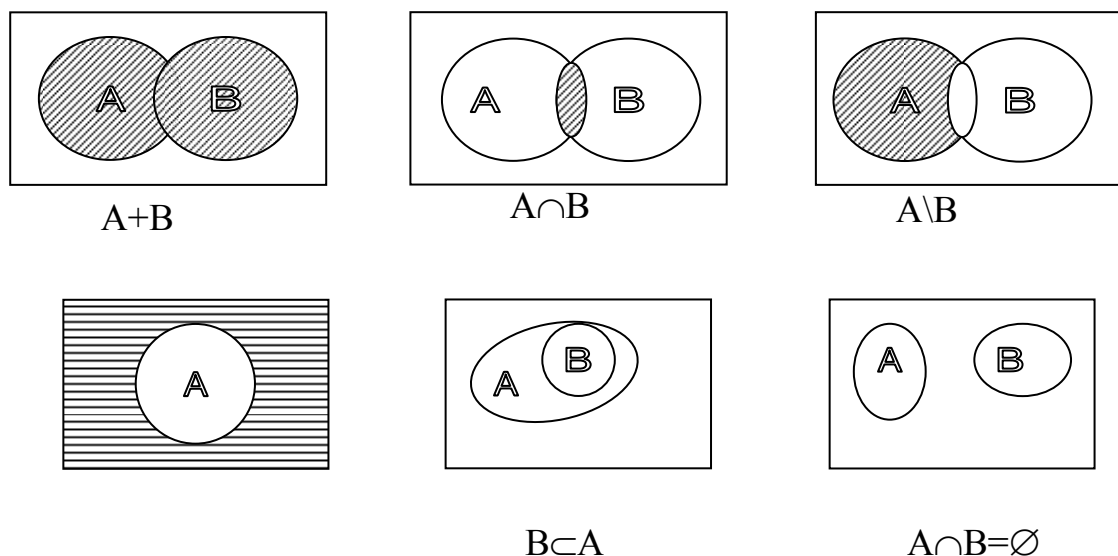


Рис. 9.

Полной группой событий называется совокупность событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ такая, что в результате опыта наступит одно и только одно из этих событий.

5.3. Задачи на классическое определение вероятности.

Геометрическая вероятность

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

Если, в частности, множество Ω состоит из равновозможных элементарных событий, то вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов A , n – число всех всевозможных исходов (классическое определение вероятности).

Пример 1.

В ящике 5 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 5. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 5.

Решение.

Так как номер шара не превышает 5, то число случаев, благоприятных событию A , равно числу всех случаев $m = n = 5$. $P(A) = \frac{5}{5} = 1$. A – событие достоверное.

Пример 2.

Из 15 строительных рабочих 10 штукатуров, а 5 – маляров. Наудачу отбирается бригада 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

Решение.

Пространство элементарных событий состоит из различных выборок по 5 из 15. Число таких выборок равно C_{15}^5 . Благоприятным событиям соответствуют выборки, содержащие трех маляров и двух штукатуров.

Трех маляров из пяти можно выбрать C_5^3 способами, а двух штукатуров из десяти C_{10}^2 . Следовательно, число выборок, соответствующих благоприятным событиям, равно $C_5^3 \cdot C_{10}^2$.

$$\text{Таким образом } P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}.$$

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа m и n для вычисления вероятностей событий, и поэтому непосредственно воспользоваться формулой $P(A) = \frac{m}{n}$ не удастся.

Например, пусть линия электропередач, соединяющая пункты A и B , в результате бури оборвалась. Какова вероятность того, что обрыв произошел на участке, заключенном между пунктами C и D , принадлежащем отрезку AB ? Множество элементарных событий в данном случае бесконечно, так как обрыв возможен в любой точке AB . При этом естественно предполагать, что вероятность обрыва на любом участке пропорциональна длине этого участка. Так как вероятность обрыва на всем AB равна 1, вероятность обрыва на CD выразится

$$P(A) = \frac{CD}{AB}.$$

Геометрическое определение вероятности – вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.)

Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes , то вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область G – часть области Q , равна $P(A) = \frac{mesG}{mesQ}$

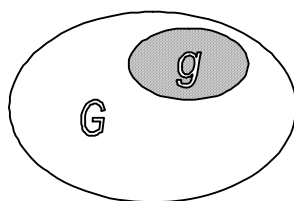


Рис. 10.

Пример 4.

Наудачу выбираются два действительных числа $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Найти вероятность того, что $y^2 \leq x$.

Решение.

Поставим в соответствие паре чисел x и y точку на плоскости (x, y) .

Пространство элементарных выборов будет квадрат, двумя сторонами которого являются единичные отрезки осей координат.

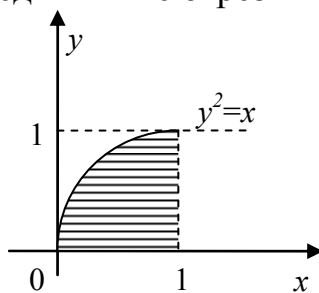


Рис. 11.

Фигура, множество точек которой соответствует исходам, благоприятным событию $y^2 \leq x$, ограничена графиками функций $y = 0$, $x = 1$, $y^2 = x$. Ее площадь $S = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$, а площадь квадрата равна единице.

$$P(A) = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}.$$

5.4. Вычисление вероятностей сложных событий.

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность

Теорема 1. (Сложения вероятностей).

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий: $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$

События A и B называются независимыми, если вероятность A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называется зависимым от события B , если вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B .

Вероятность события A , вычисленная при условии, что B имело место, называется *условной вероятностью* $P(A|B)$.

Теорема 2. (Умножения вероятностей).

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое наступило:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Обобщенная теорема умножения:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

Вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Пример 1.

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка – 0,75; для второго – 0,3; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в цель.

Решение.

Пусть событие A – первый стрелок попал в цель; событие B – второй стрелок попал в цель; событие C – третий стрелок попал в цель; ABC – все три стрелка попадут в цель.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,75 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,2025.$$

Пример 2.

Идет бомбардировка трех складов боеприпасов. Сбрасывают одну бомбу. Вероятность попадания в первый склад равна 0,01; во второй равна 0,008; в третий – 0,025. При попадании в любой из них взрываются все. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

Решение.

Событие A – взрыв складов; A_1 – попадание в первый склад; A_2 – попадание во второй склад; A_3 – попадание в третий склад.

$A = A_1 + A_2 + A_3$, так как A_1, A_2, A_3 несовместны, то:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,001 + 0,008 + 0,025 = 0,043.$$

Пример 3.

Имеется три ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение.

Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A) равна $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B) равна $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C) равна $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$.

Так как события A , B и C независимы, то искомая вероятность события ABC (по теореме умножения) равна

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

5.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть рассматривается полная группа событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (парно несовместные, которые называются гипотезами), и если событие A может наступить только при появлении одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i . $\left(\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1\right)$.

$P(A|H_i)$ – условная вероятность события A при этой гипотезе. Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A , то с учетом этого события «новые», т. е. условные, вероятности гипотез вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i)}.$$

Формула Байеса дает возможность переоценить вероятности гипотез с учетом уже известного результата опыта.

Пример 1.

Имеется три одинаковые урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй – c белых и d черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение.

Пусть событие A – появление белого шара. Формулируем гипотезы: H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны;

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(A|H_1) = \frac{a}{a+b}, P(A|H_2) = \frac{c}{c+d}, P(A|H_3) = 1;$$

по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right).$$

5.6. Случайные величины и их законы распределения

Если каждому элементарному событию ω из некоторого множества событий Ω можно поставить в соответствие определенную величину $X = X(\omega)$, то говорят, что задана случайная величина. Случайную величину X можно рассматривать как функцию события ω с областью Ω .

Случайная величина может принять то или иное значение из некоторого числового множества, однако, заранее неизвестное, какое именно.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отдельные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Ряд распределения

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{n-1}	p_n

где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i = P(X = x_i)$.

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения*.

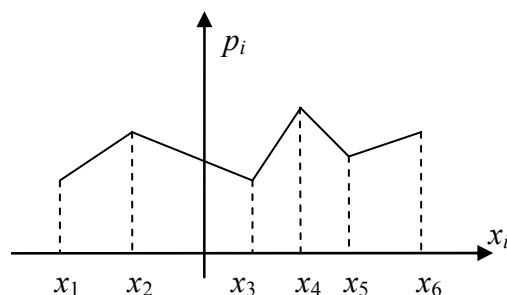


Рис. 12.

Функция распределения

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X принимает значения меньше, чем x : $F(x) = P(X < x)$.

Свойства $F(x)$:

1) функция $F(x)$ есть неубывающая функция;

- 2) $F(-\infty) = 0$;
- 3) $F(+\infty) = 1$;
- 4) для дискретных случайных величин $F(x)$ есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева.
- 5) для непрерывной случайной величины x функция распределения находится по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.

Плотность распределения вероятности

Плотностью распределения вероятности непрерывной случайной величины называется функция $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения вероятности любой случайной величины неотрицательна, $f(x) \geq 0$ и обладает свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

График функции $f(x)$ называется кривой распределения.

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad P(\alpha < x < \beta) = \int_{-\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Пример 1.

Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	3	5	7	11
p_i	0,14	0,20	0,49	0,17

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

Решение.

Если $x \leq 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0$.

Если $3 < x \leq 5$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 3) = 0,14$.

Если $5 < x \leq 7$, то

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 3) + P(X = 5) = 0,14 + 0,20 = 0,34.$$

Если $7 < x \leq 11$, то

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) = 0,14 + 0,20 + 0,49 = 0,83.$$

Если $x > 11$, то

$$F(x) = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 11) = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ 0,14, & 3 < x \leq 5 \\ 0,34, & 5 < x \leq 7 \\ 0,83, & 7 < x \leq 11 \\ 1, & x > 11 \end{cases}$$

Строим график.

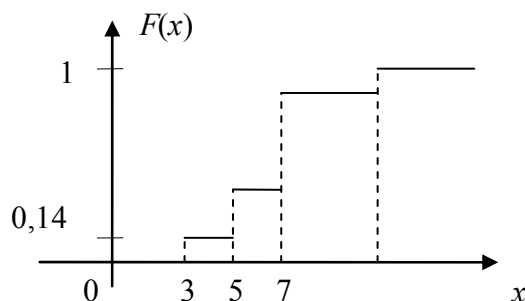


Рис. 13.

5.7. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

для дискретной случайной величины;

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

для непрерывной случайной величины.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$DX = M(x - M(x))^2.$$

Обозначим $MX = m$, тогда формулы для вычисления дисперсии:

$$DX = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - m)^2; \quad DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx.$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(x)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{DX}, \quad DX = M(X^2) - M^2 X.$$

Пример 1.

Случайная величина X – задана законом распределения

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Определить $\sigma(x)$.

Решение.

$$\text{Имеем } MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5;$$

$$DX = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,171.$$

Пример 2.

Дана функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$. Показать, что $f(x)$ может

служить плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X .

Решение.

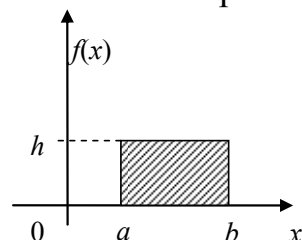
$$\text{Имеем } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = 1, \quad f(x) \geq 0.$$

Следовательно, $f(x)$ может служить плотностью распределения некоторой случайной величины.

5.8. Некоторые законы распределения случайных величин

5.8.1. Равномерное распределение

Равномерным называется распределение таких случайных величин, все значения которых лежат на $[a; b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Рис. 14.

Функция распределения этого закона распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases};$$

$$MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 1.

Случайная величина – отклонение емкости конденсатора от номинала распределено на отрезке $[-50; 50]$. Найти $f(x)$, $F(x)$, MX , DX , $P(20 \leq x \leq 40)$. Построить график $f(x)$.

Решение.

В задаче $a = -50$, $b = 50$, поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -50, \\ \frac{1}{100} & -50 \leq x \leq 50, \\ 0, & x > 50. \end{cases}$$

Построим график $f(x)$.

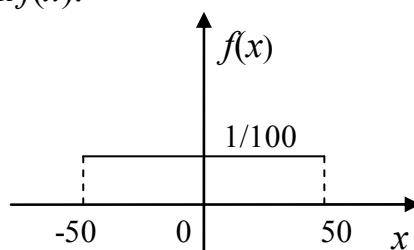


Рис. 15.

Функция распределения вероятности случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -50, \\ \frac{x+50}{100} & -50 \leq x \leq 50, \\ 1, & x > 50. \end{cases}$$

Ее график имеет вид:

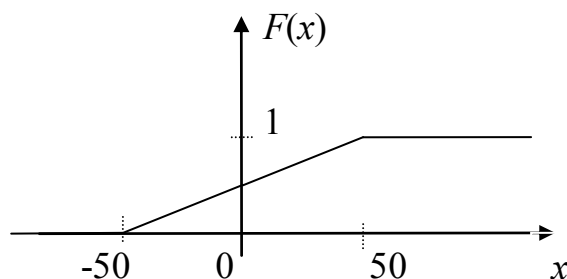


Рис. 16.

$$MX = \frac{a+b}{2} = 0, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100^2}{12} = 833,3;$$

$$P(20 \leq x \leq 40) = F(40) - F(20) = \frac{40+50}{100} - \frac{20+50}{100} = 0,2.$$

5.8.2. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона

Если вероятность наступления случайного события в каждом испытании равна p , то, как известно, вероятность того, что при n испытаниях событие осуществляется m раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p.$$

Закон распределения случайной величины X , которая может принимать $(n+1)$ значение $(0, 1, \dots, n)$, описывается формулой Бернулли, называется *биномиальным*.

Закон распределения случайной величины X , которая может принимать любые целые неотрицательные значения $(0, 1, \dots, \infty)$, описываемый формулой

$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, носит название Пуассона.

Для биномиального закона $MX = np$; $DX = npq$.

Для закона Пуассона: $MX = DX = a$.

Пример 1.

Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трех испытаниях. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X . Найти MX , DX , $\sigma(x)$.

Решение.

Случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Составим ряд распределения:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,216.$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432.$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 0,288.$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064.$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

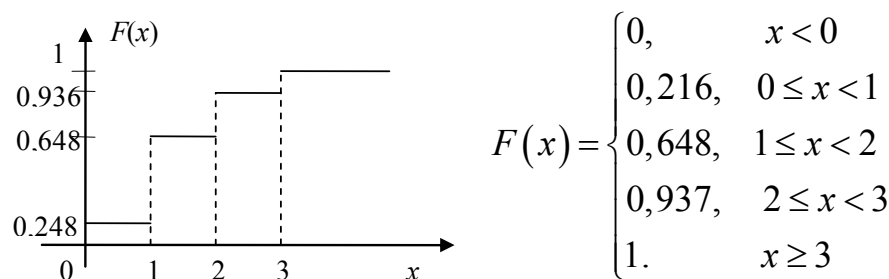


Рис. 17.

$$MX = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 4 \cdot 0,288 + 9 \cdot 0,064 - (1,2)^2 = 0,72;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \sqrt{0,72} = 0,85.$$

Пример 2.

Радиоаппаратура состоит из 100 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равно 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и менее двух элементов за год?

Решение.

Считая случайное число X отказавших элементов подчиняющихся закону Пуассона

$$P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = np = 1000 \cdot 0,001 = 1$, получим:

1) вероятность отказа ровно двух элементов

$$P(X = 2) = P_2 = \frac{a^2}{2!} e^{-a} = 0,184;$$

2) вероятность отказа не менее двух элементов

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1);$$

т.е.

$$P(X \geq 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - P_0 - P_1 = 1 - e^{-a} (1 + a) = 1 - \frac{2}{e} = 0,254.$$

5.8.3. Показательное (экспоненциальное) распределение. Функция надежности

Аналогом закона Пуассона для непрерывных случайных величин служит показательный закон распределения, функция плотности распределения которого имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$ постоянный параметр.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases};$$

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(x) = \frac{1}{\lambda};$$

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}.$$

Если T – непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность безотказной работы какого-либо элемента, а λ – среднее число отказов в единицу времени (интенсивность отказов), то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределенной по показательному закону распределения с функцией распределения

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0,$$

которая определяет вероятность отказа элемента за время t , а $F(t)$ называется функцией надежности.

Пример 1.

Время T телефонного разговора – случайная величина, распределенная по показательному закону распределения с параметром $\lambda = 0,4$. Записать $f(t), F(t)$. Найти MX, DX . Определить вероятность того, что разговор будет продолжаться более трех минут.

Решение.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0,4e^{-0,4t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-0,4t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$MX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \quad DX = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,16} = 6,25;$$

$$P(t > 3) = 1 - P(t < 3) = 1 - (1 - e^{-0,4 \cdot 3}) = e^{-1,2} \approx 0,3.$$

Пример 2.

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону: $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 4e^{-4t}, & t \geq 0. \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал $(0,2; 0,5)$.

Решение.

По формуле $P(\alpha < x < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ имеем

$$P(0,2 < x < 0,5) = e^{-4 \cdot 0,2} - e^{-4 \cdot 0,5} = 0,4493 - 0,1353 = 0,314.$$

Нормальный закон распределения. Функция Лапласа

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где m_x – математическое ожидание случайной величины; σ_x – среднее квадратичное отклонение величины X .

$\text{erf } X = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – называется функцией Лапласа, или интеграл вероятностей, функция ошибок.

Иногда используют другие формы функции Лапласа, например,

$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – нормированная функция Лапласа.

$$\bar{\Phi}(x) = 0,5\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right); \quad P(\alpha < x < \beta) = 0,5\left[\Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Отметим следующие свойства функции Лапласа:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(+\infty) = 1$;
- 3) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 4) $P(|x - m| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right)$.

Замечание

Значение функций $f(x)$ и $\Phi(x)$ протабулированы. Таблицы можно найти в справочниках или в приложениях учебников по теории вероятностей и математической статистики.

Пример 1.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 30$ и $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что X примет значение принадлежащее интервалу $(10; 50)$.

Решение.

Пользуясь формулой $P(\alpha < x < \beta) = \left[\bar{\Phi}\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) \right]$, получим

$$P(10 < x < 50) = \left[\bar{\Phi}\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{10 - 30}{10}\right) \right] = \bar{\Phi}(2) - \bar{\Phi}(-2) = 2\bar{\Phi}(2).$$

По таблице находим значение $\bar{\Phi}(2) = 0,4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < x < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

Пример 2.

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 10$. Найти $P(|x - 20| < 3)$.

Решение.

Используя формулу $P(|x - m| < \varepsilon) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, имеем

$$P(|x - 20| < 3) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{3}{10}\right).$$

По таблице находим $\bar{\Phi}(0,3) = 0,1179$.

Поэтому $P(|x - 20| < 3) = 0,2358$.

Пример 3.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$. Задан интервал $(\alpha; \beta)$, не включающий начало координат. При каком значении среднего квадратического отклонения σ вероятность попадания в $(\alpha; \beta)$ достигает максимума?

Решение.

Для решения задачи сделаем схематический чертеж:

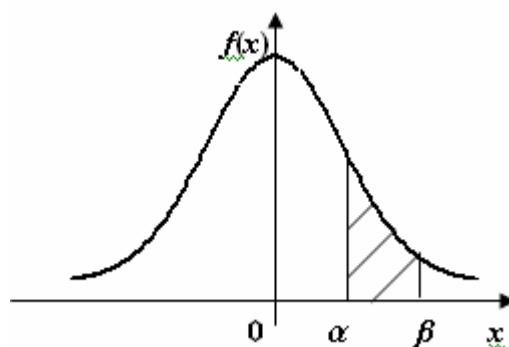


Рис. 18.

Значение σ найдем, дифференцируя по σ вероятность попадания в $(\alpha; \beta)$ и приравнявая производную к нулю. Имеем

$$P(\alpha < x < \beta) = \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\beta/\sigma} e^{-t^2} dt - \int_0^{\alpha/\sigma} e^{-t^2} dt \right).$$

$$\frac{d}{d\sigma} (P(\alpha < x < \beta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\beta}{\sigma^2} \right) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\alpha}{\sigma^2} \right) \right) = 0.$$

Отсюда $\beta e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} = \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$, $e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2} - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} = \frac{\beta}{\alpha}$, и, следовательно,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}}. \quad \text{Для малого интервала } (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

$$\sigma \approx a \left[1 - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 \right] \approx a.$$

5.9. Закон больших чисел

Трудно сказать о том, какие значения примет случайная величина. Все зависит от совокупности случайных обстоятельств. Когда таких случайных обстоятельств очень много, то, оказывается, существуют условия, позволяющие предвидеть ход опыта, явления, которые получили название закона больших чисел или предельных теорем.

Если существует математическое ожидание квадрата случайной величины, то имеет место неравенство:

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Это неравенство называется вторым неравенством Чебышева.

Первое неравенство Чебышева

Если существует $M(|X|)$, то для всех $\varepsilon > 0$ имеет место

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(|X|)}{\varepsilon}.$$

Выберем в качестве случайной величины центрированную случайную величину $X_0 = X - M(X)$ и применим к ней второе неравенство Чебышева:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{M((X - M(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева (закон больших чисел)

Если случайные величины в последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно независимы, а их дисперсии удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k) = 0,$$

то для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема Маркова

(закон больших чисел в общей формулировке)

Если дисперсии произвольных случайных величин в последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k) = 0,$$

то имеет место утверждение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k) \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Пример 1.

Измеряется скорость ветра в данном пункте Земли. Случайная величина X – проекции вектора скорости ветра на фиксированное направление. Оценить вероятность события $A = \{X \geq 80 \text{ км/ч}\}$, если путем многолетних измерений установлено, что $m_x = 16 \text{ км/ч}$.

Решение.

За ε возьмем 80 км/ч и, применив первое неравенство Чебышева, получим $P(A) \leq \frac{m_x}{\varepsilon} \Rightarrow P(X \geq 80 \text{ км/ч}) \leq \frac{16}{80} = 0,2$.

Предельные теоремы теории вероятностей

Теорема Бернулли. Относительная частота успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли сходятся по вероятности при $n \rightarrow \infty$ к вероятности успеха в одном испытании.

Центральная предельная теорема (Ляпунова). Если случайные величины в последовательности $\{X_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x , то для любого действительного x

$$F_{Y_n(X)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt,$$

где $Y_n(X) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m_k}{\sigma_x / \sqrt{n}}$ – стандартизированное среднее арифметическое n случайных величин в последовательности.

Пусть X_n – число успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли. Тогда при достаточно больших значениях n, p, q

$$P(m_1 < X < m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(X)$ – табулирована и $\Phi(-X) = 1 - \Phi(X)$ (интегральная теорема Муавра – Лапласа).

$$P(X_n = m) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{X_m^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $X_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$,

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция табулирована (локальная теорема Муавра – Лапласа).

Пример 1.

Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

Решение.

По условию задачи $n = 144, m = 120, p = 0,8, q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Найдем значение аргумента X_m

$$X_m = \frac{120 - 144 \cdot 0,8}{\sqrt{144 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{12(10 - 12 \cdot 0,8)}{12 \cdot 0,4} = 1.$$

По таблице функций $\varphi(x)$ находим, что $\varphi(1) = 0,2420$. Искомая вероятность равна

$$P(X = 120) = -\frac{1}{\sqrt{144 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi(1) = \frac{0,2420}{12 \cdot 0,4} \approx 0,0542.$$

Пример 2.

Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятность следующих событий: A = (в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок), B = (будет сделано ровно 7 ошибок).

Решение.

Для вычисления вероятности события A применим интегральную теорему Муавра – Лапласа.

$$m_1 = 0, m_2 = 20, n = 1100, p = 0,01, q = 1 - p = 1 - 0,01 = 0,99.$$

Искомая вероятность будет

$$P(0 \leq X < 20) = \Phi\left(\frac{20 - 1100 \cdot 0,01}{\sqrt{1100 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1100 \cdot 0,01}{\sqrt{1100 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{9}{11 \cdot 3 \cdot 0,1}\right) - \Phi\left(\frac{-11}{11 \cdot 3 \cdot 0,1}\right) = \Phi\left(\frac{3}{1,1}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{3}\right) = \Phi(2,72) - \Phi(-3,33).$$

По таблицам функции $\Phi(x)$ находим, что

$$\Phi(2,72) = 0,9967, \quad \Phi(-3,33) = 1 - \Phi(3,33) = 1 - 0,9996 = 0,0004.$$

Искомая вероятность равна

$$P(0 \leq X < 20) = \Phi(2,72) - \Phi(-3,33) = 0,9967 - 0,0004 = 0,9963.$$

5.10. Элементы математической статистики

5.10.1. Генеральная и выборочная совокупности

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партии деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $m = 100$.

5.10.2. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

5.10.3. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_k — n_k раз и $\sum n_i = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n = W_i$ — *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соот-

ветствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пример. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$W_1 = 3/20 = 0.15, \quad W_2 = 10/20 = 0.5, \quad W_3 = 7/20 = 0.35.$$

Напишем распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
W_i	0.15	0.50	0.35

Контроль: $0,15 + 0,50 + 0,35 = 1$.

5.10.4. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X . Введем обозначения: n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x ; n – общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события $X < x$ равна n_x/n . Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т. е. относительная частота n_x/n есть функция от x . Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$.

Итак, по определению,

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x – число вариант, меньших x ; n – объем выборки.

Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2 , разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2) = n_{x_2} / n.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т. е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P[F(x) - F^*(x) < \varepsilon] = 1, (\varepsilon > 0)$. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Действительно, из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

- 1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0, 1]$;
- 2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;
- 3) если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты x_i	2	6	10
Частоты n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки: $12 + 18 + 30 = 60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \leq 2.$$

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно, $F^*(x) = 12/60 = 0.2$ при $2 < x \leq 6$.

Значения $X < 10$, а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$, наблюдались $12 + 18 = 30$ раз, следовательно,

$$F^*(x) = 30/60 = 0.5 \text{ при } 6 < x \leq 10.$$

Так как $x = 10$ – наибольшая варианта, то

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 10.$$

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ 0.2 & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 0.5 & \text{при } 6 < x \leq 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 1

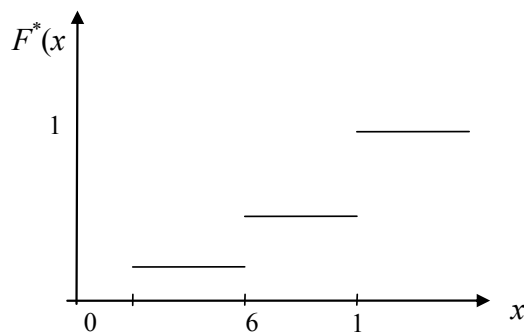


Рис. 19.

5.10.5. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном, *частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i . Точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; W_1), (x_2; W_2), \dots, (x_k; W_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты W_i . Точки $(x_i; W_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рис. 2 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1.5	3.5	5.5	7.5
W	0.1	0.2	0.4	0.3

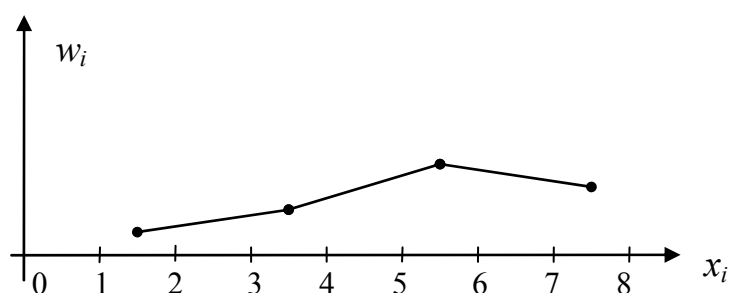


Рис. 20.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на нескольких частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариантов, попавших в i -й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h , а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

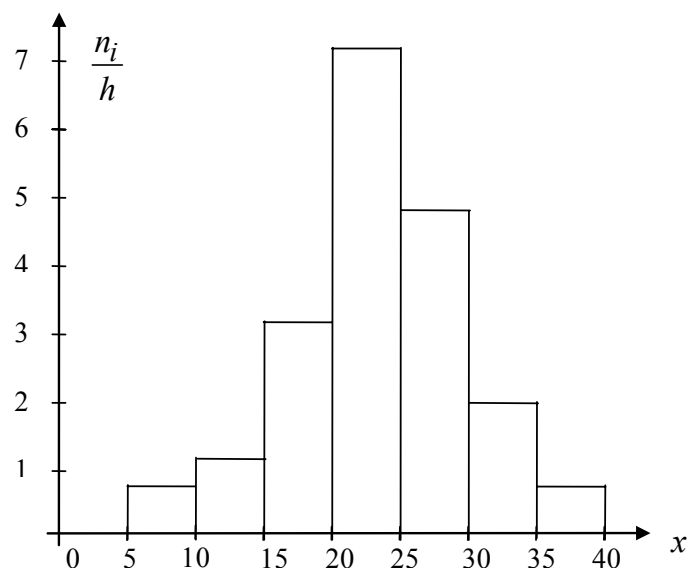


Рис. 21.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h . Площадь i -го частичного прямоугольника равна $h \cdot n_i/h = n_i$ – сумме частот вариант i -го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

На рис.3 изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, приведенного в табл. 1.

Таблица 1.

Частичный интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты
5 – 10	4	0.8
10 – 15	6	1.2
15 – 20	16	3.2
20 – 25	36	7.2
25 – 30	24	4.8
30 – 35	10	2.0
35 – 40	4	0.8

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h , а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h . Площадь i -го частичного прямоугольника равна $h \cdot W_i/h = W_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i -й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Т. 1, Т. 2. – М.: Наука, 1985. – 450 с.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 436 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432 с.
4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах. Части I, II / П. К. Данко и др. – М.: Высшая школа, 1980.
6. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. – М.: Наука, 1973.
7. Ефремова О. Н., Столярова Г. П., Некряч Е. Н. Высшая математика. Ч. II: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 200 с.
8. Арефьев К. П., Глазырина Е. Д., Ефремова О. Н., Столярова Г. П. Высшая математика. Ч. III: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 208 с.
9. Кошельская Г. А., Столярова Г. П., Харлова А. Н. Высшая математика. Часть IV. Ряды: учебное пособие. – Томск. Изд. ТПУ, 2001.
10. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1989.
11. Бондаренко В. Н. Курс теории вероятностей, задачи и упражнения. – М., 2007.
12. Палий И. А. Задачи по теории вероятностей. – М.: Наука, 2005.
13. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2000.
14. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2000.
15. Некряч Е. Н. Математика: Рабочая программа, методические указания и контрольные задания для студентов специальностей 030602 «Связи с общественностью», 040101 «Социальная работа», 100103 «Социально-культурный сервис и туризм» ИДО. – Томск: Изд. ТПУ, 2005. – 23 с.