

Вариант № 1

1.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi x(t) = \int_0^1 [\dot{x}^3(t) + \dot{x}(t)] dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2.$$

1.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$\varphi[x(t), y(t)] = \int_0^{\pi/4} [2y(t) - 4x^2(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}(t)] dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi/4) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1.$$

1.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, \pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{\pi} [\sin x \sin 4t + \sin 2x \sin 3t +$$

$$+ \sin 3x \sin 2t + \sin 4x \sin t] \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

1.2. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t) dt.$$

1.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos^2(x-t) \varphi(t) dt + 1 + \cos 4x.$$

1.4. Найти итерированное ядро $K_2(x, t)$ для уравнения Фредгольма с $K(x, t) = \exp(|x| + t)$; $a = -1$; $b = 1$.

1.5. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 4t + \sin 2x \sin 3t + \sin 3x \sin 2t + \sin 4x \sin t] \varphi(t) dt.$$

1.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t) dt.$$

1.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^1 (x+t-2xt) \exp[u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x + x^2$.

Вариант № 2

2.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^a \dot{x}^3(t) dt,$$

проходящей через точки $x(a) = b > 0$, $a > 0$.

2.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2x(t)e^t] dt, \quad x(0) = 0,5, \quad x(1) = e,$$

в классе гладких кривых.

2.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^1 \left[\left(\frac{x}{t} \right)^{2/5} + \left(\frac{t}{x} \right)^{2/5} \right] \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

2.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp(x^2 + 2x) + 2 \int_0^x \exp(x^2 + t^2) \varphi(t) dt.$$

2.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin t + t \cos t) \varphi(t) dt + 1 - \frac{2x}{p}.$$

2.4. Найти итерированное ядро $K_2(x, t)$ для уравнения Фредгольма с $K(x, t) = \exp|x - t|$; $a = 0$; $b = 1$.

2.5. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[(x/t)^{2/5} + (t/x)^{2/5} \right] \varphi(t) dt.$$

2.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x + 2 \int_0^x \varphi(t) \cos(x - t) dt.$$

2.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2) \sin[u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x$.

Вариант № 3

3.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^1 \left[t + 2\dot{x}(t) + \frac{1}{2}\dot{x}^2(t) \right] dt, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

3.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\varphi[x, y] = \int_{-1}^1 \left[2tx(t) - \dot{x}^2(t) + \frac{\dot{y}^3(t)}{3} \right] dt,$$

$$x(-1) = 2, \quad x(1) = 0, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

3.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^1 \left(x^2 t^2 - \frac{2}{45} \right) \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

3.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x \sin x + \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \cos t} \varphi(t) dt.$$

3.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(3x + t) \varphi(t) dt + \cos x.$$

3.4. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \exp x \cos t$ и $a = 0, b = \pi$.

3.5. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 t^2 - 2/45) \varphi(t) dt.$$

3.6. С помощью интегрального преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x - t) \varphi(t) dt.$$

3.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (2x^4 + 5x^3 t) \exp[u^2(t) - u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x^2 - x^4$.

Вариант № 4

4.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x(t)\dot{x}^3(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = x(1) = 0$.

4.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_{-1}^1 \{12tx(t) - \dot{x}^2(t)\} dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(0) = 0,$$

в классе гладких кривых.

4.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 2\pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{2\pi} [\cos^2(x+t) + 1/2]\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

4.2. Найти резольвенту и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x \exp(x^2 - t^2)\varphi(t) dt.$$

4.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(2x+t)\varphi(t) dt + \sin x.$$

4.4. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x \exp t$ и $a = 0, b = 1$.

4.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} [\cos^2(x+t) + 1/2]\varphi(t) dt.$$

4.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t) dt.$$

4.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/4] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/4]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) = \lambda \int_0^{\pi/4} (\cos x \cos t + 2 \sin 2x \sin 2t) \sin[u^3(t) - u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = \cos x$.

Вариант № 5

5.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^2 \{e^{\dot{x}(t)} + 3\} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1.$$

5.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\varphi[x, y] = \int_0^{\pi/2} \{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) - 2x(t)y(t)\} dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

5.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 2\pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{2\pi} [\sin(x+t) + 1/2]\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

5.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-t} \varphi(t) dt.$$

5.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-2t)\varphi(t) dt + \cos 2x.$$

5.4. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x + \sin t$ и $a = -\pi$, $b = \pi$.

5.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} [\sin(x+t) + 1/2]\varphi(t) dt.$$

5.6. Используя преобразование Лапласа, решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

5.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^1 (x-1) \exp[2u^2(t) - u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x$.

Вариант № 6

6.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^2 \{6\dot{x}^2(t) - \dot{x}^4(t) + x(t)\dot{x}(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = 0$, $x(2) = e$.

6.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_1^2 \{\dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t) + x^2(t)\} dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = e,$$

в классе гладких кривых.

6.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax,$$

где $K(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2$. Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

6.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt.$$

6.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(2x+t)\varphi(t)dt + \pi - 2x.$$

6.4. Найти итерированные ядра для уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = (x-t)^2$ и $a = -1$, $b = 1$ ($n = 2, 3$).

6.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $K(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2$ и при всех λ и a решить уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax.$$

6.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

6.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2) \exp[u^2(t) - 3u(t)]dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = 6x^2 + x^4$.

Вариант № 7

7.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^1 e^t \left\{ x^2(t) + \frac{1}{2} \dot{x}^2(t) \right\} dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = e.$$

7.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\begin{aligned} \varphi[x, y] &= \int_0^1 \{ \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + 2x(t) \} dt, \\ x(0) &= 1, \quad x(1) = 1,5, \quad y(0), \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

7.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} -\exp(-t) \operatorname{sh} x, & 0 < x < t; \\ -\exp(-x) \operatorname{sh} t, & t < x < 1. \end{cases}$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

7.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x + \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt.$$

7.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2]dy + x.$$

7.4. Найти для $n = 2, 3$ итерированные ядра уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \sin(x-t)$ и $a = 0$, $b = \pi/2$.

7.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} -\exp(-t) \operatorname{sh} x, & 0 < x < t; \\ -\exp(-x) \operatorname{sh} t, & t < x < 1. \end{cases}$$

7.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt.$$

7.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/4] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/4]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin(3x+t) \sin[\pi u^2(t) + u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = \cos x$.

Вариант № 8

8.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 x(t)\dot{x}^2(t) dt,$$

проходящей через точки $x(0) = 3$, $x(1) = 3$.

8.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_1^e \{t\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t)\} dt, \quad x(1) = 0, \quad x(e) = 1,$$

в классе гладких кривых.

8.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax,$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} -\sin(x - \pi/n)\sin(y - \pi/n), & 0 \leq x \leq y; \\ -\sin(y + \pi/n)\sin(x - \pi/n), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

8.2. Найти резольвенту и решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt.$$

8.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - xt)\varphi(t)dt + x^2 + x.$$

8.4. Найти итерированные ядра $K(x, t) = x - t$ при $a = -1$, $b = 1$.

8.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} -\sin(x - \pi/n)\sin(t - \pi/n), & 0 \leq x \leq t; \\ -\sin(t + \pi/n)\sin(x - \pi/n), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

8.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)dt.$$

8.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2t^2) \exp[2u^2(t) + 2u(t)]dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x^2 + x$.

Вариант № 9

9.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^1 e^{x(t)} \dot{x}^2(t) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \ln 4.$$

9.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\varphi[x, y] = \int_0^{\pi/2} \{2x(t)x(t) - 2x^2(t) + \dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t)\} dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

9.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin(y - 1), & -\pi \leq x \leq y; \\ \sin y \sin(x - 1), & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

9.2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = -\frac{4x - 2}{2x + 1} + \frac{8(x - t)}{2x + 1}.$$

9.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xt^3 + 5x^2t^2)\varphi(t)dt + 7xx^4 + 3.$$

9.4. Построить резольвенту для ядра $K(x, t) = \exp(x + t)$ при $a = 0$, $b = 1$.

9.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального (однородного) уравнения с симметричным ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin(t - 1), & -\pi \leq x \leq t; \\ \sin t \sin(x - 1), & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

9.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \exp(-2x + 2t)\varphi(t)dt.$$

9.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/3] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/3]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/3} (\sin(x + t) \sin[-u^2(t) + 3u(t)])dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = 1$.

Вариант № 10

10.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_2^3 \frac{t^3}{\dot{x}^2(t)} dt,$$

проходящей через точки $x(2) = 4$, $x(3) = 9$.

10.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 x(t)\dot{x}^2(t) dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \sqrt[3]{4},$$

в классе гладких кривых.

10.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x, y)\varphi(y)dy + ax,$$

где $K(x, y) = 1 + xy + x^2y^2$, $-1 \leq x, y \leq 1$. Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

10.2. Решить интегральное уравнение и построить его резольвенту

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + x^2.$$

10.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2x^4 + 5x^3t)\varphi(t)dt + x^2 - x^4.$$

10.4. Построить резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x \sin t$ при $a = 0$, $b = 1$.

10.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром $K(x, t) = 1 + xt + x^2t^2$, $-1 \leq x, t \leq 1$.

10.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

10.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}) \exp[5u^2(t) - 2u(t)]dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = x^2$.

Вариант № 11

11.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_{-1}^2 \dot{x}(t)\{1 + t^2 \dot{x}(t)\} dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(2) = 1.$$

11.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\varphi[x, y] = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\} dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -3.$$

11.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \rightarrow \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + \sin x \sin t)\varphi(t) dt + a + b \cos x; \quad a, b = \text{const.}$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

11.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt + x^2.$$

11.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^{1/3} + t^{1/3})\varphi(t) dt - 1 + 6x^2.$$

11.4. Построить резольвенту уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x \exp t$ при $a = -1$, $b = 1$.

11.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра $K(x, t)$ и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + \sin x \sin t)\varphi(t) dt + a + b \cos x; \quad a, b = \text{const.}$$

11.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \lambda \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt.$$

11.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/4] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/4]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin(x-2t) \exp[u^2(t) - 3u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = \cos 2x$.

Вариант № 12

12.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_1^2 \{t\dot{x}^4(t) - 2x(t)\dot{x}^3(t)\}dt,$$

проходящей через точки $x(1) = 0$, $x(2) = 1$.

12.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^\pi \{4x(t)\cos t + \dot{x}^2(t) - x^2(t)\}dt, \quad x(0) = x(\pi) = 0,$$

в классе гладких кривых.

12.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, \pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^\pi \cos x\varphi(t)dt$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

12.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \exp(x+t)\varphi(t)dt = x.$$

12.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi(t)dt + 6x^2 + x^4.$$

12.4. Построить резольвенту уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = (1+x)(1-t)$ при $a = -1$, $b = 1$.

12.5. Исследовать уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x\varphi(t)dt$$

на разрешимость при всех значениях параметра λ .

12.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp 2x + \int_0^x \exp(t-x)\varphi(t)dt.$$

12.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^{1/3} + t^{1/3}) \sin[u^2(t) + 2u(t)]dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = -1 + 6x^2$.

Вариант № 13

13.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_1^2 \frac{t^3}{\dot{x}^2(t)} dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 4.$$

13.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}^2(t) dt, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1.$$

13.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x) \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

13.2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = 2 - (x - t) \quad \lambda = 1.$$

13.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + \cos 2x \cos 2t) \varphi(t) dt + \cos 3x.$$

13.4. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = x^2 t^2$ при $a = -1$, $b = 1$.

13.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x) \varphi(t) dt = 0.$$

13.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x - t) - 4(x - t)^2] \varphi(t) dt.$$

13.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/2] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/2]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(t) - \lambda \int_0^{\pi/2} \sin(2x + t) \exp[-4u^2(t) + u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = +\pi - 2x$.

Вариант № 14

14.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^2 \{\dot{x}^4(t) + \dot{x}^2(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = 1$, $x(2) = 5$.

14.12. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^{2\pi} \{\dot{x}^2(t) - x^2(t)\} dt, \quad x(0) = x(2\pi) = 1,$$

в классе гладких кривых.

14.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} x) \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

14.2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = -2 + 3(x - t)$, $\lambda = 1$.

14.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + 2 \sin 2x \sin 2t) \varphi(t) dt + \cos x.$$

14.4. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = xt$ при $a = -1$, $b = 1$.

14.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} x) \varphi(t) dt = 0.$$

14.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \exp x - \int_0^x \exp(x - t) \varphi(t) dt.$$

14.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/2] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/2]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \sin[-u^2(t) - u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = \cos 2x$.

Вариант № 15

15.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^a \frac{dt}{\dot{x}^2(t)}, \quad x(0) = 0, \quad x(a) = b > 0, \quad a > 0.$$

15.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{x^2(t) + 2\dot{x}^2(t) + \ddot{x}(t)\} dt,$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = -\text{sh } 1.$$

15.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, \pi/4]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \pi/4])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

15.2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = 2 \frac{3 + \cos x}{3 + \cos t}.$$

15.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin t + 3 \cos 2x \sin 2t) \varphi(t) dt + \sin x.$$

15.4. Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с ядром $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

15.5. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt = 0.$$

15.6. С помощью преобразования Лапласа решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x J_1(x-t) \varphi(t) dt.$$

15.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/2] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/2]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} (\sin t + t \cos t) \exp[4u^2(t) - 2u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = 1 - \frac{2x}{\pi}$.

Вариант № 16

16.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_{-1}^1 \{t^2 \dot{x}^2(t) + 12x^2(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(-1) = 1$, $x(1) = 1$.

16.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_{t_0}^{t_1} \{2tx(t) + [t^2 + e^x] \dot{x}(t)\} dt, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

в классе гладких кривых.

16.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 2\pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

16.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

16.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}) \varphi(t) dt + x^2.$$

16.4. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1)$ при $a = 0$, $b = 1$.

16.6. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0.$$

16.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \exp(-4x) - 6 \int_0^x \operatorname{ch} 4(x-t) \varphi(t) dt.$$

16.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/4] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/4]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \cos^2(x-t) \sin[5u^2(t) - u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = 1 + \cos 4x$.

Вариант № 17

17.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^1 (1+t)\dot{x}^2(t)dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

17.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_{t_0}^{t_1} \{x(t) + \ddot{x}(t)\}dt,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1.$$

17.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 2\pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

17.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \varphi(t)e^{x-t} dt = x.$$

17.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-1)\varphi(t)dt + x.$$

17.4. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x - \operatorname{sh} t$ при $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq t \leq 1$.

17.5. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \varphi(t) dt = 0.$$

17.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x J_1(x-t)\varphi(t)dt.$$

17.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^1 2e^{x+t} \exp[u^2(t) - 4u(t)]dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = e^x$.

Вариант № 18

18.11. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x(t)\dot{x}(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = x(1) = 0$.

18.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{e^{x(t)} + t\dot{x}(t)\} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = x_1,$$

в классе гладких кривых.

18.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 2\pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

18.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + e^x.$$

18.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 2e^{x+t}\varphi(t) dt + e^\lambda.$$

18.4. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin(x+t)$ при $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18.5. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t) dt = 0.$$

18.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t) dt.$$

18.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, \pi/4] \rightarrow \mathcal{C}[0, \pi/4]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \cos(2x+t) \sin[u^2(t) - 3u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = \sin x$.

Вариант № 19

19.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_{-1}^1 \{\dot{x}^3(t) + \dot{x}^2(t)\} dt, \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = 3.$$

19.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_{t_0}^{t_1} \{\dot{x}^2(t) + x(t)\ddot{x}(t)\} dt,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1.$$

19.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([1, e]) \rightarrow \mathcal{C}([1, e])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_1^e (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

19.2. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} \varphi(t) dt + 1.$$

19.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+t-2xt)\varphi(t) dt + x + x^2.$$

19.4. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = e^{x-t}$ при $a = 0$, $b = 1$.

19.5. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x)\varphi(t) dt = 0.$$

19.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = J_0(x) + \int_0^x J_1(x-t)\varphi(t) dt.$$

19.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) + \int_0^1 e^{x-t} \exp[u^2(t) + 2u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = e^x$.

Вариант № 20

20.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^a \{\dot{x}^2(t) + t^2\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = 0$, $x(a) = 3$, $a > 0$?

20.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^{\pi/4} \{\dot{x}^2(t) - x^2(t)\} dt, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

в классе гладких кривых.

20.1. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_0^1 (2xt - 4x^2)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

20.2. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \exp(x^2 - t^2)$.

20.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} (\sin(x+t))\varphi(t) dt = 1.$$

20.4. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 4xt - x^2$ при $a = 0$, $b = 1$.

20.5. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2)\varphi(t) dt = 0.$$

20.6. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos 5x - \frac{7}{4} \int_0^x \operatorname{sh}(4(x-t))\varphi(t) dt.$$

20.7. Найти производную Фреше по u в точке $u = 0$ интегрального оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}[-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}[-1, 1]$ с параметром λ :

$$\widehat{A}(u) = u(x) - \lambda \int_{-1}^1 (2xt^3 + 5x^2t^2) \sin[5u^2(t) + u(t)] dt.$$

Найти все решения уравнения $\widehat{A}'(0)h = 7x^4 + 3$.

Вариант № 21

21.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^{\pi/4} \{4x^2(t) - \dot{x}^2(t) + 8x(t)\} dt, \quad x(0) = -1, \quad x(\pi/4) = 0.$$

21.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_{-e}^e \left\{ \frac{1}{2} \ddot{x}^2(t) + 24x(t) \right\} dt,$$

$$x(-e) = x(e) = \dot{x}(-e) = \dot{x}(e) = 0.$$

21.13. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

21.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}.$$

21.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t)\varphi(t) dt = x/6.$$

21.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = 1 + xt$ при $a = 0$, $b = 1$.

21.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t)\varphi(t) dt = 0.$$

21.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^4 - a \int_0^x \operatorname{sh}(a(x-t))\varphi(t) dt.$$

Вариант № 22

22.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_{-1}^1 \{12tx(t) + \dot{x}^2(t) + t^2\} dt,$$

проходящей через точки $x(-1) = -2$, $x(1) = 0$.

22.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{2e^{x(t)} - x^2(t)\} dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = e,$$

в классе гладких кривых.

22.13. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

22.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = e^{x-t}$.

22.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2t^2)\varphi(t) dt + x^2 + x.$$

22.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x + t + 1$ при $a = -1$, $b = 1$.

22.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)\varphi(t) dt = 0.$$

22.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin 2x - \frac{8}{3} \int_0^x \operatorname{sh} 3(x-t)\varphi(t) dt.$$

Вариант № 23

23.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_1^2 \{t^2 \dot{x}^2(t) - 12x^2(t)\} dt, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 8.$$

23.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_0^{\pi/2} \{\ddot{x}^2(t) - x^2(t) + t^2\} dt,$$

$$x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi/2) = -1.$$

23.13. Оператор $\widehat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\widehat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} x) \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

23.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = (2 + \cos x)/(2 + \cos t)$.

23.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2) \varphi(t) dt = x.$$

23.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x \cos t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

23.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} x) \varphi(t) dt = 0.$$

23.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t) \varphi(x-t) dt = \sin x.$$

Вариант № 24

24.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{1 + \dot{x}^2(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = x(1) = 0$?

24.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_1^2 \dot{x}(t) \{1 + t^2 \dot{x}(t)\} dt, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 1,$$

в классе гладких кривых.

24.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2 t^2) \varphi(t) dt + x^2 + 2x.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

24.18. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \operatorname{ch} x / \operatorname{ch} t$.

24.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt = e^x.$$

24.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin x - \sin t$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

24.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 (3xt + 5x^2 t^2) \varphi(t) dt + x^2 + 2x.$$

24.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(t) \varphi(x-t) dt - \frac{1}{2} \operatorname{sh} x.$$

Вариант № 25

25.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^{\pi/4} \{x^2(t) - \dot{x}^2(t) + 6x(t) \sin 2t\} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/4) = 1.$$

25.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\begin{aligned} \varphi[x] &= \int_{-1}^0 \{240x(t) - \ddot{x}^2(t)\} dt, \\ x(-1) &= 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(-1) = -4, 5, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ \ddot{x}(-1) &= 16, \quad \ddot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

25.13. Оператор $\hat{A}: \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \rightarrow \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \cos x) \varphi(t) dt + 2x + 1.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

25.18. Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = a^{x-t}$, ($a > 0$).

25.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \cos 2x.$$

25.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x^2t - xt^2$ при $0 \leq x \leq 1$.

25.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \cos x) \varphi(t) dt + 2x + 1.$$

25.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x^5 - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt.$$

Вариант № 26

26.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^{2\pi} \{\dot{x}^2(t) - x^2(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = 0$, $x(2\pi) = 1$?

26.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}{x(t)} dt, \quad x(0) = 2, \quad x(2) = 0, \quad x > 0,$$

в классе гладких кривых.

26.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([0, \pi]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \pi])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

26.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t^2} dt.$$

26.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x\varphi(t)}{1+t^2} dt = 1 - x^2.$$

26.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = \sin(x - 2t)$ при $a = 0$, $b = 2\pi$.

26.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) \varphi(t) dt.$$

26.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt.$$

Вариант № 27

27.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^2 \{1 - e^{-\dot{x}^4(t)}\} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1.$$

27.12. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) + \ddot{x}^2(t)\} dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \operatorname{sh} 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = \operatorname{ch} 1.$$

27.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = (3x - 2) \int_0^1 t\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

27.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2 - t^2} \varphi(t) dt.$$

27.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(x+t) + \cos(x-t)] \varphi(t) dt = \cos x.$$

27.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x \sin t + \sin 2x$ при $a = -\pi$, $b = \pi$.

27.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda(3x - 2) \int_0^1 t\varphi(t) dt.$$

27.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

Вариант № 28

28.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{ \dot{x}^2(t) + 9x^2(t) - 3t \} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = x(1) = 0$?

28.12. Найти экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt, \quad x(t_0) = t_0, \quad x(t_1) = t_1,$$

в классе гладких кривых.

28.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([0, \pi/4]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \pi/4])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

28.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = xe^x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

28.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi t \varphi(t) dt = \frac{1}{2}(1-x).$$

28.20. Найти резольвенту для ядра

$$K(x, t) = x \left(1 - \frac{3}{2}t \right)$$

при $a = 0$, $b = 1$.

28.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t) dt.$$

28.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\frac{x^3}{6} = \int_0^x \varphi(t) \varphi(x-t) dt.$$

Вариант № 29

29.11. Исследовать на экстремум функционал

$$\varphi[x] = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - x(t)\dot{x}^3(t)\}dt, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

29.12. Методами вариационного исчисления найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$.

29.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_0^1 (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x)\varphi(t)dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

29.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 2^{x^2+2x} + \int_0^x 2^{x^2-t^2+1}\varphi(t)dt.$$

29.19. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t}\varphi(t)dt = x.$$

29.20. Найти резольвенту для ядра $K(x, t) = x \sin(2\pi t)$ при $a = 0$, $b = 1$.

27.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int (x \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} x)\varphi(t)dt.$$

27.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)dt = \sin x.$$

Вариант № 30

30.11. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$\varphi[x] = \int_0^a \{\dot{x}^2(t) - x^2(t)\} dt,$$

проходящей через точки $x(0) = x(a) = 0$?

30.12. Методами вариационного исчисления найти расстояние от точки $A(1, 0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

30.13. Оператор $\hat{A} : \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([-1, 1])$ определен соотношением

$$\hat{A}\varphi(x) = (3x - 2) \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 + 3xt)\varphi(t) dt.$$

Найти все собственные числа и соответствующие собственные функции этого оператора.

30.18. Методом дифференцирования решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + e^x + 1.$$

30.19. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t) dt$$

все повторные ядра и резольвента также зависят от разности $(x-t)$.

30.20. Доказать, что если ядра $L(x, t)$ и $M(x, t)$ ортогональны, то резольвента ядра $K(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$ равна сумме резольвент ядер $L(x, t)$ и $M(x, t)$.

30.21. Найти характеристические числа и собственные функции для однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda(3x - 2) \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2 + 3xt)\varphi(t) dt = 0.$$

30.22. С помощью преобразования Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t) dt = x^2 e^x.$$